

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (-2x + 3)e^{2x}$$

1. Trouver deux réels a et b tels que la fonction F définie par $x \mapsto F(x) = (ax + b)e^{2x}$ soit une primitive de f sur \mathbb{R} .

2. Calculer $\int_{-1}^2 f(x) dx$.

Analyse

Dans un premier temps, on a affaire à un calcul de dérivée d'un produit de fonctions simples (affine et exponentielle), la fonction dérivée obtenue devant être identifiée à la fonction fournie. La deuxième question est alors un simple calcul intégral.

Résolution

Question 1.

Dire que la fonction F est une primitive de la fonction f sur \mathbb{R} équivaut à dire que pour tout x réel, on a : $F'(x) = f(x)$.

En posant : $F(x) = (ax + b)e^{2x}$, il vient :

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2(ax + b)e^{2x} + ae^{2x} \\ &= (2ax + 2b + a)e^{2x} \end{aligned}$$

Pour tout x réel, l'égalité $F'(x) = f(x)$ équivaut à :

$$(2ax + 2b + a)e^{2x} = (-2x + 3)e^{2x}$$

Soit :

$$(2(a+1)x + 2b + a - 3)e^{2x} = 0$$

La fonction exponentielle $x \mapsto e^{2x}$ étant non nulle, cette dernière égalité entraîne :

$$2(a+1)x + 2b + a - 3 = 0$$

Une fonction affine (et plus généralement polynôme) est nulle pour toute valeur de x si, et seulement si, ses coefficients sont nuls. La dernière égalité équivaut donc au système :

$$\begin{cases} a + 1 = 0 \\ a + 2b - 3 = 0 \end{cases}$$

La première égalité donne immédiatement $a = -1$.

Il vient alors, grâce à la seconde : $b = \frac{1}{2}(-a + 3) = \frac{1}{2}(1 + 3) = 2$.

La primitive F est donc définie sur \mathbb{R} par :

$$F : x \mapsto (-x + 2)e^{2x}$$

Question 2.

A l'aide de la question précédente, il vient immédiatement :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 f(x) dx &= [(-x + 2)e^{2x}]_{-1}^2 \\ &= (-2 + 2)e^{2 \times 2} - (-(-1) + 2)e^{2 \times (-1)} \\ &= 0 - 3e^{-2} \\ &= \frac{-3}{e^2} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\int_{-1}^2 f(x) dx = \frac{-3}{e^2}$$