Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $\left[0;1\right]$ par :

$$f_n(t) = t^n\sqrt{1-t}$$

On pose alors :

$$I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt = \int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,dt$$

1. Justifier l'existence de I_n.
2. Calculer I_0.
3. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}.
4. Calculer I_n pour tout entier naturel n.

Analyse

Suites et intégrales … Un mélange classique permettant, à la dernière question, d'obtenir une jolie expression ☺. Au préalable, il aura fallu effectuer une intégration partie (question 3). Une fois la relation de récurrence établie, on doit essentiellement effectuer une manipulation de factorielles …

Résolution

Question 1.

Pour tout entier naturel n, la fonction f_n est continue sur l'intervalle $\left[0\,;1\right]$ comme produit de deux fonctions continues sur cet intervalle. Elle y est donc intégrable.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 f_n(t)\,dt \text{ existe.}$$

Question 2.

On a :

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-t}\,dt = \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{2}}\,dt = \left[-\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = 0 - \left(-\frac{2}{3}\right) = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$\boldsymbol{I_0 = \frac{2}{3}}$$

Question 3.

$$I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t}\,dt$$

Nous pouvons procéder à une intégration par partie. La fonction $t \mapsto t^n$ admet pour dérivée la fonction $t \mapsto nt^{n-1}$. Par ailleurs, la fonction $t \mapsto \sqrt{1-t}$ admet pour primitive $t \mapsto -\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}$ (voir question précédente). Il vient donc :

$$\begin{aligned} I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t}\,dt &= \left[-\frac{2}{3}t^n (1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + n\frac{2}{3}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{\frac{3}{2}}\,dt \\ &= 0 + \frac{2n}{3}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)\sqrt{1-t}\,dt \\ &= \frac{2n}{3}\int_0^1 t^{n-1}\sqrt{1-t}\,dt - \frac{2n}{3}\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,dt \\ &= \frac{2n}{3}I_{n-1} - \frac{2n}{3}I_n \end{aligned}$$

D'où :

$$\left(1+\frac{2n}{3}\right)I_n = \frac{2n+3}{3}I_n = \frac{2n}{3}I_{n-1}$$

Finalement :

$$\boldsymbol{I_n = \frac{2n}{2n+3}I_{n-1}}$$

Question 4.

A partir de la relation précédente, il vient :

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{2n}{2n+3} I_{n-1} \\
&= \frac{2n \times 2(n-1)}{(2n+3)\times(2n+1)} I_{n-2} \\
&= \frac{2n \times 2(n-1) \times 2(n-2)}{(2n+3)\times(2n+1)\times(2n-1)} I_{n-3} \\
&= \dots \\
&= \frac{\overbrace{2n \times 2(n-1) \times 2(n-2) \times \dots \times 2}^{n \text{ facteurs}}}{\underbrace{(2n+3)\times(2n+1)\times(2n-1)\times\dots\times 5}_{n \text{ facteurs}}} I_0 \\
&= \frac{2n \times 2(n-1) \times 2(n-2) \times \dots \times 2}{(2n+3)\times(2n+1)\times(2n-1)\times\dots\times 5} \frac{2}{3} \\
&= 2 \frac{2^n \times n!}{(2n+3)\times(2n+1)\times(2n-1)\times\dots\times 5 \times 3} \\
&= 2 \times 2^n \times n! \times \frac{(2n+2)\times 2n \times \dots \times 2}{(2n+3)\times(2n+2)\times(2n+1)\times 2n \times (2n-1)\times\dots\times 5 \times 4 \times 3 \times 2} \\
&= 2 \times 2^n \times n! \times \frac{2^{n+1} \times (n+1)!}{(2n+3)!} \\
&= \frac{2^{2(n+1)} \times n! \times (n+1)!}{(2n+3)!}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\boldsymbol{I_n = \frac{2^{2(n+1)} \times n! \times (n+1)!}{(2n+3)!}}}$$