Calculer l'intégrale définie :

$$\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin(3x)\,dx$$

Analyse

Une intégration par parties s'impose …

Résolution

Introduisons les fonctions u et v' telles que :

- $\forall x\in\mathbb{R},\ u(x)=x$;
- $\forall x\in\mathbb{R},\ v'(x)=\sin(3x)$.

On obtient immédiatement : $\forall x\in\mathbb{R},\ u'(x)=1$;
Comme primitive de v' on peut considérer la fonction v définie par :
$\forall x\in\mathbb{R},\ v(x)=-\frac{1}{3}\cos(3x)$.

Dans ces conditions, les fonctions considérées étant continues, on a, en procédant à une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}&=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin(3x)\,dx\\
&=\left[-\frac{x}{3}\cos(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(3x)\,dx\\
&=-\frac{\pi}{12}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+0+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\sin(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\\
&=\frac{\pi\sqrt{2}}{24}+\frac{1}{9}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)-0\\
&=\frac{\pi\sqrt{2}}{24}+\frac{\sqrt{2}}{18}\\
&=\frac{(4+3\pi)\sqrt{2}}{72}
\end{aligned}$$

Pour fixer les idées : $\frac{(4+3\pi)\sqrt{2}}{72} \simeq 0,2637$ (valeur approchée à 10^{-4}).

Résultat final

$$\mathbf{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin(3x)\,dx = \frac{(4+3\pi)\sqrt{2}}{72}$$