Calculer l'intégrale définie :

$$\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2(3x)\,dx$$

Analyse

Une linéarisation s'impose en guise de préambule …

Résolution

Pour tout x réel, on a classiquement :

$$\sin^2(3x)=\frac{1}{2}\left(1-\cos(2\times 3x)\right)=\frac{1}{2}\left(1-\cos(6x)\right)$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2(3x)\,dx&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\cos(6x)\right)dx\\&=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{6}\sin(6x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{6}\sin\left(\frac{6\pi}{4}\right)-(0-0)\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{6}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{6}\right)\\&=\frac{3\pi+2}{24}\end{aligned}$$

Pour fixer les idées : $\frac{3\pi+2}{24}\simeq 0,4760$ (valeur approchée à 10^{-4}).

Résultat final

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(3x)\,dx = \frac{3\pi + 2}{24}$$