Soit f et g deux fonctions à valeurs réelles, positives, définies sur l'intervalle $[0;1]$ et vérifiant : $\forall x \in [0;1],\ f(x)g(x) \geq 1$.

Montrer que l'on a :

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 g(x)dx\right) \geq 1$$

Analyse

Un produit d'intégrales ? L'inégalité de Cauchy-Schwarz n'est probablement pas loin …

Résolution

Les fonctions f et g étant positives, on peut considérées leurs racines carrées : $\sqrt{f}$ et $\sqrt{g}$. Celles-ci sont continues sur l'intervalle $[0;1]$ comme composées de fonctions continues (f et g sont continues sur $[0;1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et la fonction racine carrée est continue sur cet ensemble). L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit alors :

$$\left(\int_0^1 \sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}dx\right)^2 \leq \int_0^1 \sqrt{f(x)}^2 dx \int_0^1 \sqrt{g(x)}^2 dx$$

Le deuxième membre de cette inéquation s'écrit :

$$\int_0^1 \sqrt{f(x)}^2 dx \int_0^1 \sqrt{g(x)}^2 dx = \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx$$

Par ailleurs, comme on a : $\forall x \in [0;1],\ f(x)g(x) \geq 1$, il vient $\forall x \in [0;1],\ \sqrt{f(x)g(x)} \geq 1$ et :

$$\int_0^1 \sqrt{f(x)g(x)}dx \geq \int_0^1 1dx = 1$$

Donc :

$$\left(\int_0^1 \sqrt{f(x)g(x)}dx\right)^2 \geq 1$$

On obtient finalement :

$$1 \leq \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}dx \right)^2 \leq \int_0^1 \sqrt{f(x)}^2 dx \int_0^1 \sqrt{g(x)}^2 dx = \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx$$

D'où le résultat cherché.

Résultat final

Pour toutes fonctions *f* et *g* à valeurs réelles, définies sur $[0;1]$, positives, continues et vérifiant : $\forall x \in [0;1],\ f(x)g(x) \geq 1$, on a :

$$\left(\int_0^1 f(x)dx \right)\left(\int_0^1 g(x)dx \right) \geq 1$$