Calculer l'intégrale définie :

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

Analyse

Pour démarrer, on peut constater la parité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ et, surtout, faire une remarque sur les carrés des deux termes apparaissant à sont dénominateur. Un changement de variable en découle …

Résolution

On montre facilement que la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ est définie sur l'intervalle fermé $[-1;1]$. Notons cette fonction *f*.

L'intervalle $[-1;1]$ est symétrique et on a : $\forall x \in [-1;1],\ f(-x) = f(x)$. La fonction *f* est donc paire et il vient immédiatement :

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 2\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

On a par ailleurs : $\left(\sqrt{1+x}\right)^2 + \left(\sqrt{1-x}\right)^2 = 1+x+1-x = 2$.

On en tire immédiatement : $\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)^2 = 1$.

On peut alors effectuer le changement de variable bijectif de $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ dans $[0\,;1]$ tel que $\sqrt{\frac{1+x}{2}} = \cos u$, c'est à dire : $x = \varphi(u) = 2\cos^2(u) - 1 = \cos(2u)$. Il vient alors : $\sqrt{\frac{1-x}{2}} = \sin u$ et $dx = -2\sin(2u)\,du = -4\sin u \cos u\,du$

L'intégrale I se récrit alors :

$$\begin{aligned}
I &= 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \\
&= 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}+\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)} \\
&= \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{-4\sin u\cos u du}{\cos u+\sin u} \\
&= 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin u\cos u du}{\cos u+\sin u}
\end{aligned}$$

Le dénominateur se simplifie comme suit :

$$\cos u+\sin u=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos u+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin u\right)=\sqrt{2}\sin\left(u+\frac{\pi}{4}\right)$$

Pour ce qui est du numérateur, on a :

$$2\sin u\cos u=\sin(2u)=-\cos\left(2u+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 2\left(u+\frac{\pi}{4}\right)=2\sin^2\left(u+\frac{\pi}{4}\right)-1$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
I &= 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin u\cos u du}{\cos u+\sin u}=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin^2\left(u+\frac{\pi}{4}\right)-1}{\sqrt{2}\sin\left(u+\frac{\pi}{4}\right)}du \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin^2\left(u+\frac{\pi}{4}\right)-1}{\sin\left(u+\frac{\pi}{4}\right)}du=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 t-1}{\sin t}dt \\
&= 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\sin t-\frac{1}{\sin t}\right)dt
\end{aligned}$$

L'avant dernière ligne a été obtenue en effectuant le changement de variable : $t=u+\frac{\pi}{4}$.

On a immédiatement :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t dt=\left[-2\cos t\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=0+2\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$$

Calculons maintenant : $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t}$.

On note immédiatement que $\dfrac{dt}{\sin t}$ est invariant par le changement de variable $t \mapsto -t$. On peut donc poser : $v = \cos t$ qui donne : $dv = -\sin t dt$.

On a alors : $\dfrac{dt}{\sin t} = -\dfrac{dv}{\sin^2 t} = -\dfrac{dv}{1-v^2}$ et :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t} = -\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \frac{dv}{1-v^2} = \int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dv}{1-v^2}$$

Or : $\dfrac{1}{1-v^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+v} + \dfrac{1}{1-v}\right)$, d'où :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t} &= \int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dv}{1-v^2} = \frac{1}{1-v^2} = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{1+v} + \frac{1}{1-v}\right) dv \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln \frac{1+v}{1-v}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)^2 \\ &= \ln\left(\sqrt{2}+1\right)\end{aligned}$$

Finalement :

$$I = 2\sqrt{2} - 2\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

Résultat final

$$\boldsymbol{I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 2\sqrt{2} - 2\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}$$