Calculer l'intégrale définie :

$$I = \int_0^1 x \ln x dx$$

Analyse

La présence du logarithme népérien pousse à envisager une intégration par parties …

Résolution

Notons dans un premier temps que la fonction $x \mapsto x \ln x$ est prolongeable par continuité en 0 puisque l'on a la limite classique : $\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$.

Considérons alors la fonction u définie sur $]0\,;1]$ par : $u(x) = \ln x$. On a immédiatement, pour tout réel x de $]0\,;1]$: $u'(x) = \frac{1}{x}$.

Soit alors la fonction v définie sur $[0\,;1]$ par : $v(x) = \frac{1}{2}x^2$. On a facilement, pour tout x réel de $[0\,;1]$: $v'(x) = x$.

La fonction $u'v$ est définie sur $]0\,;1]$ par : $\forall x \in]0\,;1]$, $(u'v)(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x$. Elle est donc prolongeable par continuité en 0.

On a donc :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x \ln x dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} x dx \\ &= 0 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 0\right) \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Remarque : on obtient naturellement une valeur négative puisque la fonction $x \mapsto x \ln x$ prend des valeurs négatives sur $]0\,;1]$ du fait du logarithme népérien.

Résultat final

$$\boldsymbol{I = \int_0^1 x \ln x dx = -\frac{1}{4}}$$