Déterminer la valeur du réel a de telle sorte que l'on ait :

$$\int_1^a \frac{1}{x+1}dx = 7$$

Analyse

On évalue le membre de gauche de l'égalité en fonction de a puis on résout l'équation.

Résolution

On suppose que l'on travaille sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ sur lequel la fonction $x \mapsto x+1$ prend des valeurs strictement positives. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_1^a \frac{1}{x+1}dx &= \left[\ln(x+1)\right]_1^a \\ &= \ln(a+1) - \ln(1+1) \\ &= \ln(a+1) - \ln 2\end{aligned}$$

On doit donc résoudre : $\ln(a+1) - \ln 2 = 7$.

Il vient :

$$\begin{aligned}&\ln(a+1) - \ln 2 = 7 \\ \Leftrightarrow\ &\ln(a+1) = 7 + \ln 2 \\ \Leftrightarrow\ &a+1 = e^{7+\ln 2} \\ \Leftrightarrow\ &a+1 = e^7 \times e^{\ln 2} = 2\times e^7 \\ \Leftrightarrow\ &a = 2\times e^7 - 1\end{aligned}$$

Résultat final

$$\boldsymbol{\int_1^a \frac{1}{x+1}dx = 7 \ \text{ pour } \ a = 2\times e^7 - 1}$$