Soit I et J les intégrales :

$$\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^x\cos^2 x\right)dx \text{ et } \mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^x\sin^2 x\right)dx$$

Calculer $\mathrm{I}+\mathrm{J}$ et $\mathrm{I}-\mathrm{J}$ (pour le calcul de $\mathrm{I}-\mathrm{J}$, on pourra procéder à deux intégrations par parties après avoir remarqué que l'on a : $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos(2x)$) et en déduire I et J.

Analyse

Le calcul est classique et fait appel à la linéarité de l'intégrale et à la technique de l'intégration par parties.

Résolution

On a d'abord :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}+\mathrm{J} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^x\cos^2 x\right)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^x\sin^2 x\right)dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^x\cos^2 x+e^x\sin^2 x\right)dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^x\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\right)dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x dx \\
&= \left[e^x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= e^{\frac{\pi}{2}}-1
\end{aligned}$$

Puis, en tenant compte de la remarque de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}-\mathrm{J} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^x \cos^2 x\right) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^x \sin^2 x\right) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^x \cos^2 x - e^x \sin^2 x\right) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^x \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\right) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos\left(2x\right) dx
\end{aligned}$$

Soit alors : $u\left(x\right)=\cos\left(2x\right)$ qui donne $u'\left(x\right)=-2\sin\left(2x\right)$ qui est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et $v'\left(x\right)=e^x$, fonction continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, admettant comme primitive : $v\left(x\right)=e^x$.

On a alors (intégration par parties) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}-\mathrm{J} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos\left(2x\right) dx \\
&= \left[e^x \cos\left(2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \left(-2\sin\left(2x\right)\right) dx \\
&= e^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(2\times\frac{\pi}{2}\right) - 1 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin\left(2x\right) dx \\
&= -e^{\frac{\pi}{2}} - 1 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin\left(2x\right) dx
\end{aligned}$$

Pour calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin\left(2x\right) dx$, nous allons procéder à une nouvelle intégration par parties.

Soit alors : $u\left(x\right)=\sin\left(2x\right)$ qui donne $u'\left(x\right)=2\cos\left(2x\right)$ qui est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et $v'\left(x\right)=e^x$, fonction continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, admettant comme primitive : $v\left(x\right)=e^x$.

On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}-\mathrm{J} &= -e^{\frac{\pi}{2}}-1+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(2x)\,dx \\
&= -e^{\frac{\pi}{2}}-1+2\left\{\left[e^x \sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(2x)\,dx\right\} \\
&= -e^{\frac{\pi}{2}}-1+2\left\{e^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\cancel{2\times\frac{\pi}{2}}\right)-1\times 0-2(\mathrm{I}-\mathrm{J})\right\} \\
&= -e^{\frac{\pi}{2}}-1-4(\mathrm{I}-\mathrm{J})
\end{aligned}$$

D'où : $5(\mathrm{I}-\mathrm{J})=-e^{\frac{\pi}{2}}-1$ et, finalement : $\mathrm{I}-\mathrm{J}=\frac{1}{5}\left(-e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)$.

On a donc le système :

$$\begin{cases} \mathrm{I}+\mathrm{J}=e^{\frac{\pi}{2}}-1 \\ \mathrm{I}-\mathrm{J}=\frac{1}{5}\left(-e^{\frac{\pi}{2}}-1\right) \end{cases}$$

On obtient facilement :

$$\mathrm{I}=\frac{1}{2}\left\{(\mathrm{I}+\mathrm{J})+(\mathrm{I}-\mathrm{J})\right\}=\frac{1}{2}\left\{e^{\frac{\pi}{2}}-1+\frac{1}{5}\left(-e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)\right\}=\frac{1}{5}\left(2e^{\frac{\pi}{2}}-3\right)$$

Et :

$$\mathrm{J}=\frac{1}{2}\left\{(\mathrm{I}+\mathrm{J})-(\mathrm{I}-\mathrm{J})\right\}=\frac{1}{2}\left\{e^{\frac{\pi}{2}}-1-\frac{1}{5}\left(-e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)\right\}=\frac{1}{5}\left(3e^{\frac{\pi}{2}}-2\right)$$

Résultat final

$$\boxed{\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^x\cos^2 x\right)dx=\frac{1}{5}\left(2e^{\frac{\pi}{2}}-3\right) \text{ et } \mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^x\sin^2 x\right)dx=\frac{1}{5}\left(3e^{\frac{\pi}{2}}-2\right)}$$