

Soit f une fonction continue et positive de $[0;1]$ dans \mathbb{R} .

On pose : $A = \int_0^1 f(t) dt$.

Montrer que l'on a :

$$\sqrt{1+A^2} \leq \int_0^1 \sqrt{1+f^2(t)} dt \leq 1+A$$

Analyse

Une des inégalités est simple. L'autre est plus « technique » et fait appel à l'inégalité de Cauchy-Schwarz (il conviendra donc de faire judicieusement apparaître un produit d'intégrales)..

Résolution

On a facilement, la fonction f prenant des valeurs positives : $\forall t \in [0;1], \sqrt{1+f^2(t)} \leq 1+f(t)$ (comparer les carrés).

On en déduit alors : $\int_0^1 \sqrt{1+f^2(t)} dt \leq \int_0^1 (1+f(t)) dt$.

Or, on a : $\int_0^1 (1+f(t)) dt = \int_0^1 1 dt + \int_0^1 f(t) dt = 1+A$.

On a donc établi : $\int_0^1 \sqrt{1+f^2(t)} dt \leq 1+A$.

Comparer les réels positifs $\sqrt{1+A^2}$ et $\int_0^1 \sqrt{1+f^2(t)} dt$ équivaut à comparer leurs carrés.

On peut donc comparer $1+A^2$ et $\left(\int_0^1 \sqrt{1+f^2(t)} dt \right)^2$.

On a :

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 \sqrt{1+f^2(t)} dt \right)^2 - 1 &= \left(\int_0^1 \sqrt{1+f^2(t)} dt - 1 \right) \left(\int_0^1 \sqrt{1+f^2(t)} dt + 1 \right) \\ &= \int_0^1 (\sqrt{1+f^2(t)} - 1) dt \int_0^1 (\sqrt{1+f^2(t)} + 1) dt \end{aligned}$$

On a : $\forall t \in [0;1], 1+f^2(t) \geq 1$ et donc : $\forall t \in [0;1], \sqrt{1+f^2(t)} \geq 1$.

Les fonctions $t \mapsto \sqrt{1+f^2(t)} - 1$ et $t \mapsto \sqrt{1+f^2(t)} + 1$ sont des fonctions continues et positives et on peut alors écrire en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\sqrt{1+f^2(t)} - 1) dt \int_0^1 (\sqrt{1+f^2(t)} + 1) dt &= \int_0^1 \sqrt{1+f^2(t)} - 1 dt \int_0^1 \sqrt{1+f^2(t)} + 1 dt \\ &\geq \left(\int_0^1 \sqrt{\sqrt{1+f^2(t)} - 1} \sqrt{\sqrt{1+f^2(t)} + 1} dt \right)^2 \\ &= \left(\int_0^1 \sqrt{(\sqrt{1+f^2(t)} - 1)(\sqrt{1+f^2(t)} + 1)} dt \right)^2 \\ &= \left(\int_0^1 \sqrt{\sqrt{1+f^2(t)}^2 - 1} dt \right)^2 \\ &= \left(\int_0^1 \sqrt{1+f^2(t)} - 1 dt \right)^2 \\ &= \left(\int_0^1 \sqrt{f^2(t)} dt \right)^2 \\ &= \left(\int_0^1 f(t) dt \right)^2 \\ &= A^2 \end{aligned}$$

On a ainsi établi :

$$\left(\int_0^1 \sqrt{1+f^2(t)} dt \right)^2 - 1 = \int_0^1 (\sqrt{1+f^2(t)} - 1) dt \int_0^1 (\sqrt{1+f^2(t)} + 1) dt \geq A^2$$

Soit :

$$\left(\int_0^1 \sqrt{1+f^2(t)} dt \right)^2 \geq 1 + A^2$$

Finalement :

$$\int_0^1 \sqrt{1+f^2(t)} dt \geq \sqrt{1+A^2}$$

La deuxième inégalité est ainsi établie.

Résultat final

Pour toute fonction f définie, continue et positive sur $[0;1]$ à valeurs dans \mathbb{R} , on a :

$$\sqrt{1+A^2} \leq \int_0^1 \sqrt{1+f^2(t)} dt \leq 1+A$$

$$\text{Avec } A = \int_0^1 f(t) dt$$