Après avoir étudié les variations de la fonction $x \mapsto (\ln x)^2$ sur un intervalle approprié, donner un encadrement de l'intégrale :

$$\int_{e^2}^{e^5} (\ln t)^2 \, dt$$

Analyse

Pour encadrer l'intégrale, on peut encadrer la fonction sur l'intervalle considéré.
La fonction $t \mapsto (\ln t)^2$ est assez simple et l'étude de ses variations ne pose pas de problème particulier …

Résolution

La fonction $x \mapsto (\ln x)^2$ est la composée de la fonction logarithme népérien et de la fonction carrée. Sur l'intervalle $\left[e^2 ; e^5\right]$, inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, la fonction logarithme népérien est strictement croissante et prend ses valeurs dans l'intervalle $[2 ; 5]$, lui-même inclus dans $\mathbb{R}_+$. Or, la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit finalement que la fonction $x \mapsto (\ln x)^2$ est strictement croissante sur l'intervalle $\left[e^2 ; e^5\right]$.

D'après ce qui précède, on a :

$$\forall x \in \left[e^2 ; e^5\right], \left(\ln e^2\right)^2 \leq (\ln x)^2 \leq \left(\ln e^5\right)^2$$

C'est-à-dire :

$$\forall x \in \left[e^2 ; e^5\right], 4 \leq (\ln x)^2 \leq 25$$

On en déduit alors :

$$\int_{e^2}^{e^5} 4dx \leq \int_{e^2}^{e^5} (\ln x)^2 \, dx \leq \int_{e^2}^{e^5} 25dx$$

Soit :

$$4\left(e^5 - e^2\right) \leq \int_{e^2}^{e^5} (\ln x)^2 \, dx \leq 25\left(e^5 - e^2\right)$$

Finalement :

$$4e^2\left(e^3-1\right)\leq\int_{e^2}^{e^5}\left(\ln x\right)^2 dx\leq 25e^2\left(e^3-1\right)$$

Résultat final

$$\boxed{4e^2\left(e^3-1\right)\leq\int_{e^2}^{e^5}\left(\ln x\right)^2 dx\leq 25e^2\left(e^3-1\right)}$$