On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

Soit *a* un réel strictement positif.

1. Calculer $\int_{-a}^{a} f(x)dx$.

   (on factorisera le numérateur et le dénominateur de *f* par $e^{\frac{x}{2}}$)

2. Montrer que la fonction *f* est impaire et retrouver, par des considérations géométriques, le résultat de la question 1.

Analyse

Dans cet exercice, on calcule une intégrale en utilisant classiquement une primitive de la fonction à intégrer (question 1.) où en utilisant une caractéristique fondamentale de la fonction (elle est impaire) et les considérations géométriques associées (question 2.).

Résolution

Question 1.

Suivons l'indication de l'énoncé :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)}{e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)} = \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} = 2\frac{\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}$$

En posant : $u(x) = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$, on constate que l'on a simplement : $u'(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)$ puis :

$$f(x) = 2\frac{u'(x)}{u(x)}$$

On a facilement : $\forall x\in\mathbb{R}, e^{\frac{x}{2}}>0$ et $e^{-\frac{x}{2}}>0$. Il vient donc : $\forall x\in\mathbb{R}, u(x)>0$ puis :

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)dx &= \int_{-a}^{a} 2\frac{u'(x)}{u(x)}dx = 2\int_{-a}^{a}\frac{u'(x)}{u(x)}dx = 2\left[\ln\left(u(x)\right)\right]_{-a}^{a}\\ &= 2\left[\ln\left(u(a)\right)-\ln\left(u(-a)\right)\right] = 2\ln\frac{u(a)}{u(-a)}\\ &= 2\ln\frac{e^{\frac{a}{2}}+e^{-\frac{a}{2}}}{e^{-\frac{a}{2}}+e^{\frac{a}{2}}} = 2\ln 1 = 2\times 0\\ &= 0\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0}$$

Question 2.

Notons, dans un premier temps que l'exponentielle et définie sur $\mathbb{R}$ et rappelons que l'on a $\forall x\in\mathbb{R}, e^x>0$ et donc $\forall x\in\mathbb{R}, e^x+1>0$. Ainsi, la fonction *f* est définie sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, on a :

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{e^{-x}\left(1-e^x\right)}{e^{-x}\left(1+e^x\right)}=\frac{1-e^x}{1+e^x}=-\frac{e^x-1}{e^x+1}=-f(x)$$

Il résulte de ce qui précède que la fonction *f* est impaire sur $\mathbb{R}$.

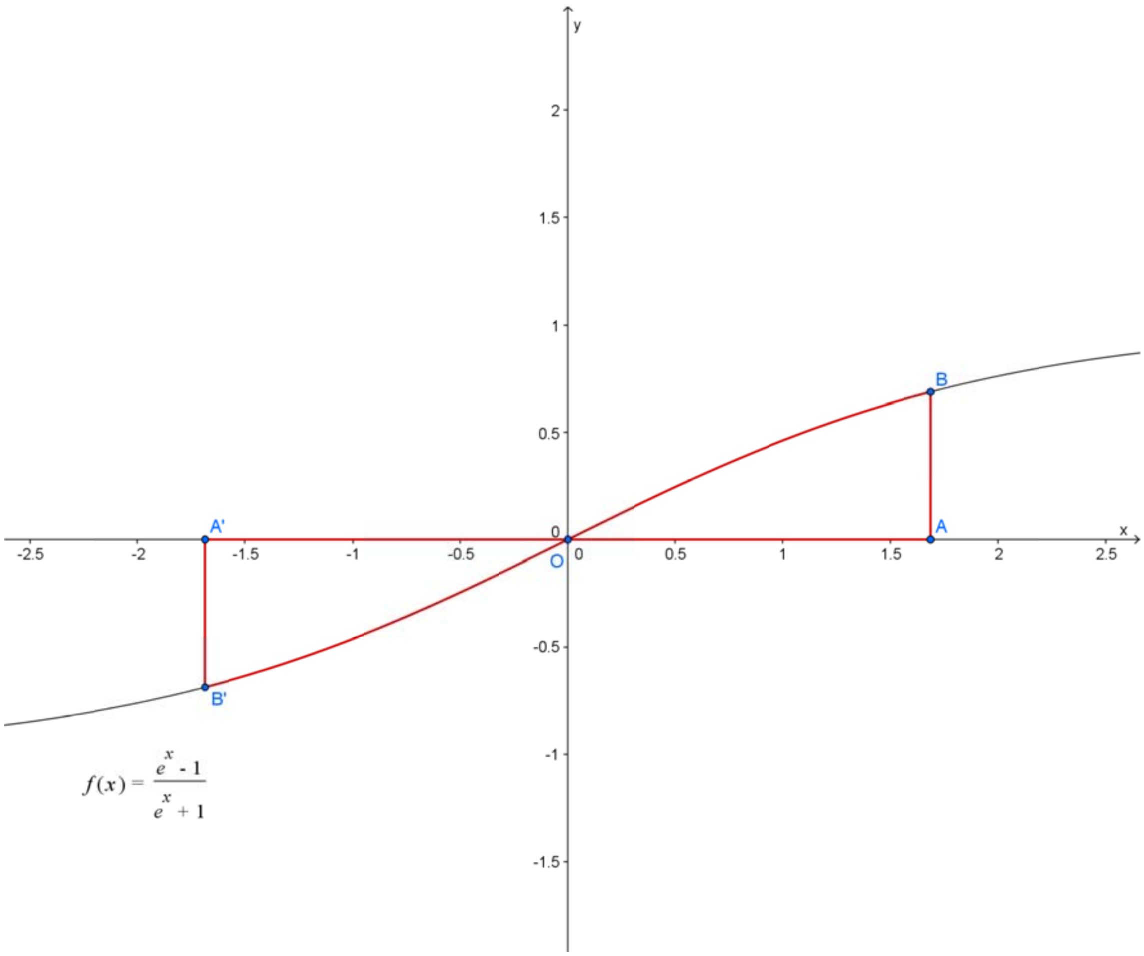
On a aussi : $\forall x\in\mathbb{R}, e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$.

On a : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$.

Or, sur l'intervalle $[0\,;a]$, la fonction *f* prend des valeurs positives. On en déduit que l'intégrale $\int_{0}^{a} f(x)dx$ est égale à l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction *f* et les deux droites d'équations $x=0$ et $x=a$.

Sur l'intervalle $[-a\,;0]$, la fonction *f* prend des valeurs négatives. On en déduit que l'intégrale $\int_{-a}^{0} f(x)dx$ est égale à l'opposée de l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction *f* et les deux droites d'équations $x=0$ et $x=-a$.

La fonction f étant impaire sur $\mathbb{R}$ (et donc, en particulier, sur l'intervalle symétrique $[-a\,;a]$), les deux domaines décrits précédemment sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'origine (voir la figure ci-après) et admettent ainsi la même aire. On en déduit finalement la nullité de l'intégrale.



Résultat final

Pour la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, on a :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$