Soit α un réel strictement positif différent de 1.

On définit la suite (u_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_n^{n+1} \alpha^x dx$$

1. Pour tout entier naturel *n*, calculer u_n.

2. Déduire de ce qui précède que la suite (u_n) est géométrique (on précisera sa raison et son premier terme).

3. Donner $\lim_{n \to +\infty} u_n$ (on discutera suivant la valeur de α).

Analyse

Un exercice court permettant de reprendre les notions élémentaires relatives aux intégrales, aux fonctions exponentielles et aux suites géométriques.

Résolution

Question 1.

Rappelons que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha^x = e^{x \times \ln \alpha}$. On en déduit immédiatement que la fonction $x \mapsto \frac{1}{\ln \alpha} e^{x \times \ln \alpha} = \frac{1}{\ln \alpha} \alpha^x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \alpha^x$ sur $\mathbb{R}$. Il vient alors, pour tout entier naturel *n* :

$$u_n = \int_n^{n+1} \alpha^x dx = \left[\frac{1}{\ln \alpha} \alpha^x \right]_n^{n+1} = \frac{1}{\ln \alpha} \alpha^{n+1} - \frac{1}{\ln \alpha} \alpha^n = \frac{\alpha^n}{\ln \alpha} (\alpha - 1) = \frac{\alpha - 1}{\ln \alpha} \alpha^n$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\alpha - 1}{\ln \alpha} \alpha^n}$$

Question 2.

L'expression de u_n obtenue à la question précédente est de la forme $u_0\, q^n$ avec $u_0 = \dfrac{\alpha - 1}{\ln \alpha}$ et $q = \alpha$. On en déduit immédiatement :

> La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = \dfrac{\alpha - 1}{\ln \alpha}$ et de raison $q = \alpha$.

Question 3.

Puisque nous avons affaire à une suite géométrique de raison $q = \alpha > 0$ (et $\alpha \neq 1$), on a immédiatement :

- Pour $\alpha \in \left]0\,;1\right[$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
- Pour $\alpha > 1$: on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha^n = +\infty$. Par ailleurs, on a : $\alpha - 1 > 0$ et $\ln \alpha > 0$. On en déduit : $u_0 = \dfrac{\alpha - 1}{\ln \alpha} > 0$ puis, finalement : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

> - Pour $\alpha \in \left]0\,;1\right[$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
> - Pour $\alpha > 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.