Soit f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle $\left[a\,;b\right]$ $(a \leq b)$.

On se propose d'établir, dans cet exercice, l'inégalité :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b \left(f(t)\right)^2 dt \times \int_a^b \left(g(t)\right)^2 dt} \qquad (\mathrm{E})$$

1. Justifier l'existence des intégrales $\int_a^b f(t)g(t)dt$, $\int_a^b \left(f(t)\right)^2 dt$ et $\int_a^b \left(g(t)\right)^2 dt$.

2. Pour tout réel x, on pose :

$$P(x) = \int_a^b \left(x\,f(t) + g(t)\right)^2 dt$$

   a. Justifier l'existence de la fonction P.
   b. Donner, en justifiant, le signe de P.
   c. On admet l'équivalence : $\int_a^b \left(f(t)\right)^2 dt = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

      On suppose ici $f \neq 0$. Montrer alors que P est une fonction polynôme de degré 2.

      Que peut-on en déduire pour le discriminant associé à P ?
   d. Etablir (E).

Analyse

L'inégalité proposée est (très) classique. Tous les outils requis pour l'établir ne sont pas au programme de la classe de terminale S (l'équivalence de la question 2.c. est déterminante) mais l'essentiel oui. Une difficulté réside dans le distinguo que l'on doit clairement faire entre la variable x et la variable muette (« t » ici) intervenant dans les intégrales.

Résolution

Question 1.

Puisque les fonctions *f* et *g* sont continues sur l'intervalle $\left[a\,;b\right]$, il en va de même pour les fonctions *fg*, f^2 et g^2 (produits de fonctions continues). On en tire immédiatement l'existence des intégrales considérées.

Les intégrales $\int_a^b f(t)g(t)\,dt$, $\int_a^b \left(f(t)\right)^2 dt$ et $\int_a^b \left(g(t)\right)^2 dt$ existent.

Question 2.a.

Pour tout *x* réel <u>fixé</u>, la fonction $t \mapsto \left[x\,f(t)+g(t)\right]^2$ est continue sur l'intervalle $\left[a\,;b\right]$ comme carré d'une fonction elle-même continue sur cet intervalle. On en déduit immédiatement l'existence de l'intégrale.

Pour tout réel *x*, l'intégrale $\int_a^b \left[x\,f(t)+g(t)\right]^2 dt$ existe.

Question 2.b.

Pour tout *x* réel <u>fixé</u>, on a : $\forall t \in \left[a\,;b\right], \left[x\,f(t)+g(t)\right]^2 \geq 0$. On en déduit immédiatement que l'intégrale correspondante est positive. D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \int_a^b \left[x\,f(t)+g(t)\right]^2 dt \geq 0$$

Question 2.c.

En développant le carré, on obtient d'abord :

$$\int_a^b \left[x\,f(t)+g(t)\right]^2 dt = \int_a^b \left[\left(f(t)\right)^2 x^2 + 2f(t)g(t) + \left(g(t)\right)^2\right] dt$$

La linéarité de l'intégrale nous donne alors :

$$\begin{aligned}\int_a^b \left[x f(t)+g(t)\right]^2 dt &= \int_a^b \left[\left(f(t)\right)^2 x^2 + 2 f(t) g(t) + \left(g(t)\right)^2\right] dt \\ &= \left(\int_a^b \left(f(t)\right)^2 dt\right) x^2 + 2\left(\int_a^b f(t) g(t) dt\right) x + \int_a^b \left(g(t)\right)^2 dt\end{aligned}$$

On obtient une expression de la forme $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ avec $\alpha=\int_a^b \left(f(t)\right)^2 dt \neq 0$ (puisque, par hypothèse, on a $f \neq 0$ et $f \neq 0 \Rightarrow \int_a^b \left(f(t)\right)^2 dt \neq 0$), $\beta=\int_a^b f(t) g(t) dt$ et $\gamma=\int_a^b \left(g(t)\right)^2 dt$.

La fonction *P* est une fonction polynôme de degré 2.

A la question précédente, on a établi : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$. La fonction polynôme *P* gardant un signe constant, on en déduit que son discriminant est négatif.

Le discriminant associé à la fonction polynôme *P* est négatif.

Question 2.d.

Pour conclure, on doit distinguer deux cas suivant que la fonction *f* est nulle ou pas sur l'intervalle $[a ; b]$.

Si la fonction *f* est nulle sur l'intervalle $[a ; b]$, alors il en va de même pour les fonctions *fg* et f^2. On en déduit alors immédiatement : $\int_a^b f(t) g(t) dt=0$ et $\int_a^b \left(f(t)\right)^2 dt=0$. Ainsi, les deux membres de l'inégalité (E) sont nuls et (E) est vérifiée (égalité).

Si la fonction *f* n'est pas la fonction nulle sur l'intervalle $[a ; b]$. Alors, d'après la question 2.c., la fonction *P* est une fonction polynôme de degré 2 gardant un signe constant sur $\mathbb{R}$ et dont le discriminant associé est, de fait, négatif. Ce discriminant s'écrit :

$$\begin{aligned}\Delta &= \left[2\left(\int_a^b f(t) g(t) dt\right)\right]^2 - 4\int_a^b \left(f(t)\right)^2 dt \int_a^b \left(g(t)\right)^2 dt \\ &= 4\left[\left(\int_a^b f(t) g(t) dt\right)^2 - \int_a^b \left(f(t)\right)^2 dt \int_a^b \left(g(t)\right)^2 dt\right]\end{aligned}$$

Il vient alors :

$$
\begin{aligned}
& \Delta \leq 0 \\
& \Leftrightarrow 4\left[\left(\int_a^b f(t) g(t) d t\right)^2-\int_a^b(f(t))^2 d t \int_a^b(g(t))^2 d t\right] \leq 0 \\
& \Leftrightarrow\left(\int_a^b f(t) g(t) d t\right)^2-\int_a^b(f(t))^2 d t \int_a^b(g(t))^2 d t \leq 0 \\
& \Leftrightarrow\left(\int_a^b f(t) g(t) d t\right)^2 \leq \int_a^b(f(t))^2 d t \int_a^b(g(t))^2 d t \\
& \Leftrightarrow\left|\int_a^b f(t) g(t) d t\right| \leq \sqrt{\int_a^b(f(t))^2 d t \int_a^b(g(t))^2 d t}
\end{aligned}
$$

L’inégalité est ainsi établie dans le deuxième cas. Elle est donc valable tout le temps.