Calculer l'intégrale définie :

$$\mathrm{I}=\int_{-1}^{1} x^2 3^x\,dx$$

Analyse

La présence du facteur polynomial suggère une intégration par parties …

Résolution

Soit la fonction *f* définie sur l'intervalle $[-1;1]$ par $x\mapsto f(x)=x^2$. Elle y est dérivable en tant que fonction polynôme et on a : $\forall x\in[-1;1],\ f'(x)=2x$ qui est également continue sur l'intervalle $[-1;1]$ en tant que fonction polynôme.

Soit maintenant la fonction définie sur l'intervalle $[-1;1]$ par $x\mapsto 3^x=e^{x\times\ln 3}$. Elle y est continue comme composée de la fonction linéaire $x\mapsto \ln 3\times x$, continue sur cet intervalle, et de la fonction exponentielle, continue sur $\mathbb{R}$. La fonction $g:x\mapsto g(x)=\frac{1}{\ln 3}e^{x\times\ln 3}=\frac{1}{\ln 3}3^x$ en est une primitive sur l'intervalle $[-1;1]$.

Une première intégration par parties donne donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{I}&=\int_{-1}^{1} x^2 3^x\,dx\\&=\left[\frac{1}{\ln 3}x^2 3^x\right]_{-1}^{1}-\frac{2}{\ln 3}\int_{-1}^{1} x3^x\,dx\\&=\frac{1}{\ln 3}\left(3-3^{-1}\right)-\frac{2}{\ln 3}\int_{-1}^{1} x3^x\,dx\\&=\frac{8}{3\ln 3}-\frac{2}{\ln 3}\int_{-1}^{1} x3^x\,dx\end{aligned}$$

On va maintenant calculer l'intégrale $\mathrm{J}=\int_{-1}^{1} x3^x\,dx$ en procédant à une nouvelle intégration par parties.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[-1;1]$ par $x \mapsto f(x) = x$. Elle y est dérivable en tant que fonction polynôme et on a : $\forall x \in [-1;1],\ f'(x) = 1$ qui est également continue sur l'intervalle $[-1;1]$ en tant que fonction polynôme (constante).

Les considérations relatives à la fonction $x \mapsto 3^x = e^{x \times \ln 3}$ sont inchangées.

L'intégration par partie donne alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{J} = \int_{-1}^{1} x3^x\,dx &= \left[\frac{1}{\ln 3}x3^x\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{\ln 3}\int_{-1}^{1} 3^x\,dx \\
&= \frac{1}{\ln 3}\left(3+3^{-1}\right) - \frac{1}{\ln 3}\left[\frac{1}{\ln 3}3^x\right]_{-1}^{1} = \frac{10}{3\ln 3} - \frac{1}{(\ln 3)^2}\left(3-3^{-1}\right) \\
&= \frac{10}{3\ln 3} - \frac{8}{3(\ln 3)^2}
\end{aligned}$$

Il vient donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \frac{8}{3\ln 3} - \frac{2}{\ln 3}\int_{-1}^{1} x3^x\,dx \\
&= \frac{8}{3\ln 3} - \frac{2}{\ln 3}\mathrm{J} \\
&= \frac{8}{3\ln 3} - \frac{2}{\ln 3}\left[\frac{10}{3\ln 3} - \frac{8}{3(\ln 3)^2}\right] \\
&= \frac{8}{3\ln 3} - \frac{20}{3(\ln 3)^2} + \frac{16}{3(\ln 3)^3}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\mathrm{I} = \int_{-1}^{1} x^2 3^x\,dx = \frac{8}{3\ln 3} - \frac{20}{3(\ln 3)^2} + \frac{16}{3(\ln 3)^3} \simeq 0{,}926$$

Résultat final

$$\mathrm{I} = \int_{-1}^{1} x^2 3^x\,dx = \frac{8}{3\ln 3} - \frac{20}{3(\ln 3)^2} + \frac{16}{3(\ln 3)^3} \simeq 0{,}926$$