

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur l'intervalle  $[0;1]$ .

Soit  $F$  la primitive de  $f$  sur l'intervalle  $[0;1]$  s'annulant en 0.

Montrer que l'on a :

$$\int_0^1 (1-t) f(t) dt = \int_0^1 F(t) dt$$

---

## Analyse

La présence du facteur polynomial dans l'intégrale du membre de gauche de l'égalité suggère une intégration par parties ...

---

## Résolution

Soit la fonction définie sur l'intervalle  $[0;1]$  par  $t \mapsto 1-t$ . Elle y est dérivable en tant que fonction polynôme (affine) et sa dérivée est la fonction définie par :  $t \mapsto -1$  qui est également continue sur l'intervalle  $[0;1]$  en tant que fonction polynôme (constante).

Soit maintenant la fonction  $f$  définie et continue, par hypothèse, sur l'intervalle  $[0;1]$ .  $F$  est un de ses primitives (celle qui s'annule en 0).

Une intégration par parties donne donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-t) f(t) dt &= \left[ (1-t)F(t) \right]_0^1 - \int_0^1 (-1)F(t) dt \\ &= \underbrace{(1-1)F(1)}_{=0} - \underbrace{(1-0)F(0)}_{=0} + \int_0^1 F(t) dt \\ &= \int_0^1 F(t) dt \end{aligned}$$

Le résultat est ainsi établi.