Dans cet exercice, on ne cherchera pas à déterminer une quelconque primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+1}$.

1. On donne : $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{\pi}{6}$ et $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{\pi}{12}$.

   Calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{4}{t^2+1}dt$.

2. On note F une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ et on donne $\mathrm{F}(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

   Calculer $\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Analyse

Une primitive « inaccessible » (en terminale …) et deux intégrales données ; à partir de là, la relation de Chasles et la linéarité permettent d'ouvrir bien des portes …

Résolution

Question 1.

En utilisant la relation de Chasles, il vient :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}dt &= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{1}{t^2+1}dt + \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}dt \\ &= \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{4}{t^2+1}dt + \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}dt\end{aligned}$$

D'où : $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{4}{t^2+1}dt = 4\left(\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}dt - \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}dt\right)$

Puis :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{4}{t^2+1}dt &= 4\left(\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{t^2+1}dt-\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{1}{t^2+1}dt\right)\\ &= 4\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{12}\right)\\ &= 4\frac{\pi}{12}\\ &= \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{4}{t^2+1}dt=\frac{\pi}{3}}$$

Question 2.

On a : $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{4}{t^2+1}dt=4\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{1}{t^2+1}dt=4\left(F(1)-F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=4\left(\frac{\pi}{2}-F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$.

D'après la question précédente, on a aussi : $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{4}{t^2+1}dt=\frac{\pi}{3}$.

D'où :

$$\begin{aligned}&4\left(\frac{\pi}{4}-\mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\frac{\pi}{3}\\ \Leftrightarrow\ &\frac{\pi}{4}-\mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{12}\\ \Leftrightarrow\ &\mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}\\ \Leftrightarrow\ &\mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}}$$