

Soit  $f$  une fonction réelle de la variable réelle définie et continue sur un segment  $[a; b]$ .

On suppose que  $f$  vérifie :

$$\int_a^b f^2 = \int_a^b f^3 = \int_a^b f^4$$

Montrer que la fonction  $f$  est constante sur l'intervalle  $[a; b]$  et préciser ses valeurs possibles.

---

## Analyse

Cela fait beaucoup d'égalités ! Alors que, dans le cas général, on se « contente » de ... l'inégalité de Cauchy-Schwarz ... On en déduira donc l'existence d'une certaine dépendance linéaire.

---

## Résolution

L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux fonctions  $f$  et  $f^2$  s'écrit ici :

$$\left(\int_a^b f^3\right)^2 = \left(\int_a^b f \cdot f^2\right)^2 \leq \int_a^b f^2 \times \int_a^b (f^2)^2 = \int_a^b f^2 \times \int_a^b f^4$$

Soit :

$$\left(\int_a^b f^3\right)^2 \leq \int_a^b f^2 \times \int_a^b f^4$$

En supposant  $\int_a^b f^2 = \int_a^b f^3 = \int_a^b f^4$ , on se trouve dans un cas d'égalité.

On en déduit alors que les fonctions  $f$  et  $f^2$  sont linéairement dépendantes.

Soit  $f$  est la fonction nulle sur le segment  $[a; b]$  et on bien affaire à une fonction constante.

Soit on a :  $f^2 = \alpha f$  avec  $\alpha$  réel positif non nul et il vient :  $f(f - \alpha) = 0$ .

Cette égalité devant être vraie sur le segment  $[a; b]$ , il vient  $f = \alpha$ . On a bien affaire à une fonction constante.

On va préciser la valeur de  $\alpha$ .

On a :  $\int_a^b f^2 = \int_a^b f^3 = \int_a^b f^4 \Leftrightarrow \alpha^2 = \alpha^3 = \alpha^4$ .

Comme  $\alpha \neq 0$ , l'égalité  $\alpha^2 = \alpha^3$  entraîne  $\alpha = 1$ .

On constate alors que l'on a immédiatement  $\alpha^3 = \alpha^4$ .

En définitive, la fonction  $f$  est bien une fonction constante sur le segment  $[a ; b]$ . Elle prend la valeur 0 ou la valeur 1.

---

## Résultat final

Les fonctions  $f$  continues sur un segment  $[a ; b]$  et vérifiant  $\int_a^b f^2 = \int_a^b f^3 = \int_a^b f^4$  sont les deux fonctions constantes prenant respectivement les valeurs 0 ou 1 sur ce segment.