Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 3$.

A quelle condition sur le réel *a*, la valeur moyenne de *f* sur l'intervalle $[1; a]$ est-elle supérieure ou égale à 10 ?

Analyse

La résolution se fait en deux temps : on calcule d'abord la valeur moyenne μ de *f* sur $[1; a]$ puis on résout l'inéquation correspondant à la contrainte imposée à μ dans l'énoncé.

Résolution

On a, pour tout réel *a* strictement supérieur à 1 :

$$\mu = \frac{1}{a-1}\int_1^a f(x)\,dx = \frac{1}{a-1}\int_1^a (2x+3)\,dx = \frac{1}{a-1}\left[x^2+3x\right]_1^a = \frac{1}{a-1}\left(a^2+3a-4\right)$$

Ici, on peut remarquer que la factorisation de a^2+3a-4 fait apparaître le facteur $a-1$ (ce n'est en rien un hasard …) : $a^2+3a-4 = (a-1)(a+4)$.
On a donc :

$$\mu = \frac{1}{a-1}\left(a^2+3a-4\right) = \frac{(a-1)(a+4)}{a-1} = a+4$$

Il vient ensuite :

$$\mu \geq 10 \Leftrightarrow a+4 \geq 10 \Leftrightarrow a \geq 6.$$

Si l'on n'a pas factorisé a^2+3a-4, on a (toujours avec $a > 1$) :

$$\mu \geq 10 \Leftrightarrow \frac{1}{a-1}\left(a^2+3a-4\right) \geq 10 \Leftrightarrow a^2+3a-4 \geq 10(a-1) \Leftrightarrow a^2-7a+6 \geq 0$$

On obtient facilement la factorisation $a^2-7a+6 = (a-1)(a-6)$ puis, en tenant compte de $a > 1$: $a^2-7a+6 = (a-1)(a-6) \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 6$. On a ainsi retrouvé le résultat précédent.

Résultat final

$$\frac{1}{a-1}\int_1^a f(x)\,dx \geq 10 \Leftrightarrow a \geq 6$$