Soit a et b deux réels tels que $0<a<b$.

Montrer que l'on a :

$$\int_a^b \frac{dx}{x} \leq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$$

Analyse

L'inégalité nous conduit à penser à … l'inégalité de Cauchy-Schwarz … Non ? ☺

Résolution

Considérons, sur l'intervalle $[a\,;b] \subset \mathbb{R}_+^*$, les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $g : x \mapsto 1$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit : $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$.

On a :

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 = \left(\int_a^b \frac{dx}{x}\right)^2$$

$$\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right) = \left(\int_a^b \frac{dx}{x^2}\right)\left(\int_a^b dx\right) = \left[-\frac{1}{x}\right]_a^b \times (b-a) = \left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)\times(b-a) = \frac{(b-a)^2}{ab}$$

On a donc : $\left(\int_a^b \frac{dx}{x}\right)^2 \leq \frac{(b-a)^2}{ab}$.

Comme $b>a>0$, on a : $\sqrt{\frac{(b-a)^2}{ab}} = \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$.

Par ailleurs, comme la fonction inverse prend des valeurs positives sur l'intervalle $[a\,;b]$, on a : $\int_a^b \frac{dx}{x} \geq 0$.

On en déduit :

$$\left(\int_a^b \frac{dx}{x}\right)^2 \leq \frac{(b-a)^2}{ab} \Leftrightarrow \int_a^b \frac{dx}{x} \leq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$$

Le résultat est établi.

Résultat final

Pour tout intervalle $[a\,;b] \subset \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\int_a^b \frac{dx}{x} \leq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$$