

Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right)}$$

Analyse

Le logarithme népérien de l'expression dont on cherche la limite nous donne immédiatement une somme de Riemann !

Résolution

Pour tout n entier naturel non nul, on a :

$$\begin{aligned} \ln \left[\sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right)} \right] &= \frac{1}{n} \ln \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln \left(1 + \frac{2}{n}\right) + \dots + \ln \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

On reconnaît ici une somme de Riemann pour la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $[0; 1]$. La fonction f étant continue sur cet intervalle (la fonction $x \mapsto 1+x$ est continue sur l'intervalle $[0; 1]$ en tant que fonction affine. Elle prend ses valeurs dans l'intervalle $[1; 2]$ qui est inclus dans \mathbb{R}_+^* sur lequel la fonction logarithme népérien est continue), on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \ln(1+x) dx .$$

Pour déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, on peut s'inspirer du fait que la fonction logarithme népérien admet pour primitive sur \mathbb{R}_+^* la fonction $x \mapsto x \ln x - x$.

On part de la fonction $\varphi : x \mapsto (1+x) \ln(1+x)$ qui est dérivable sur l'intervalle $[0; 1]$ et admet pour dérivée : $\varphi' : x \mapsto \ln(1+x) + 1$. On en déduit immédiatement que la fonction $x \mapsto (1+x) \ln(1+x) - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $[0; 1]$.

Plus « classiquement », on peut procéder à une intégration par parties en posant :

$u(x) = \ln(1+x)$, qui donne $u'(x) = \frac{1}{1+x}$, et $v'(x) = 1$ qui admet pour primitive la fonction v telle que $v(x) = 1+x$. On a alors :

$$\begin{aligned}\int \ln(1+x) dx &= \int u(x)v'(x) dx \\ &= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx \\ &= (1+x)\ln(1+x) - \int \frac{1}{1+x} \times (1+x) dx \\ &= (1+x)\ln(1+x) - \int dx \\ &= (1+x)\ln(1+x) - x\end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(1+x) dx &= [(1+x)\ln(1+x) - x]_0^1 \\ &= (1+1)\ln(1+1) - 1 - ((1+0)\ln(1+0) - 0) \\ &= 2\ln 2 - 1 \\ &= \ln \frac{4}{e}\end{aligned}$$

On a donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left[\sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right)} \right] = \ln \frac{4}{e}$ et donc, finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right)} = \frac{4}{e}$$

Résultat final

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right)} = \frac{4}{e}$$