Donner un équivalent en $+\infty$ de $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

Analyse

Un simple modification de la somme proposée permet de faire apparaître une somme de Riemann dont on connaît la limite …

Résolution

On a facilement :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} &= \sqrt{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right) \\ &= n\sqrt{n} \times \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\end{aligned}$$

La somme $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$ est une somme de Riemann associée à la fonction racine carrée sur l'intervalle $[0\,;1]$. Comme cette fonction y est continue, on a : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x}dx$.

Mais : $\int_0^1 \sqrt{x}dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left(1^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}$.

On a donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} = \frac{2}{3}$ soit $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}$, soit encore : $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{\frac{2}{3}n\sqrt{n}} = 1$.

Finalement : $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3}n\sqrt{n}$

Résultat final

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3}n\sqrt{n}$$