

Calculer l'intégrale définie :

$$I = \int_0^{\pi} \frac{t}{1 + \sin t} dt.$$

On pourra effectuer le changement de variable : $u = \pi - t$.

Analyse

Le changement de variable proposé permet en fait de ramener le calcul proposé (où le numérateur est ... « gênant ») à un calcul plus simple. Ensuite, il convient de ne pas négliger les caractéristiques propres à la fonction sinus.

Résolution

Comme suggéré dans l'énoncé, nous posons $u = \pi - t$.

Il en découle immédiatement : $du = -dt$.

Comme $\sin t = \sin(\pi - u) = \sin u$, il vient alors :

$$I = \int_0^{\pi} \frac{t}{1 + \sin t} dt = \int_{\pi}^0 \frac{\pi - u}{1 + \sin u} (-du) = \int_0^{\pi} \frac{\pi - u}{1 + \sin u} du = \pi \int_0^{\pi} \frac{du}{1 + \sin u} - I$$

D'où : $2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{du}{1 + \sin u}$, soit $I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{du}{1 + \sin u}$.

On remarque alors que l'on peut tirer parti de la symétrie du sinus. En effet, on montre facilement (à nouveau grâce au changement de variable $t = \pi - u$!) que l'on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1 + \sin u} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{du}{1 + \sin u}$$

Il vient alors : $I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{du}{1 + \sin u} = \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1 + \sin u} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{du}{1 + \sin u} \right) = \frac{\pi}{2} \times 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1 + \sin u} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1 + \sin u}$.

Pour calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1+\sin u}$, on effectue le changement de variable classique : $\theta = \tan \frac{u}{2}$, soit $u = 2 \arctan \theta$, qui est ici bijectif de $[0; 1]$ dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (remarque : essayer ce changement de variable sans la remarque préliminaire relative à la symétrie du sinus ...).

On a : $d\theta = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{u}{2}\right) du = \frac{1}{2} (1 + \theta^2) du$, soit $du = \frac{2}{1 + \theta^2} d\theta$.

Et : $1 + \sin u = 1 + \frac{2\theta}{1 + \theta^2} = \frac{\theta^2 + 2\theta + 1}{1 + \theta^2} = \frac{(\theta + 1)^2}{1 + \theta^2}$.

Il vient alors :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1 + \sin u} = \int_0^1 \frac{1 + \theta^2}{(\theta + 1)^2} \frac{2}{1 + \theta^2} d\theta = 2 \int_0^1 \frac{d\theta}{(\theta + 1)^2} = 2 \left[\frac{-1}{\theta + 1} \right]_0^1 = 2 \left(\frac{-1}{2} - \frac{-1}{1} \right) = 1$$

Finalement : $I = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1 + \sin u} = \pi$.

Résultat final

$$\int_0^1 \frac{t}{1 + \sin t} dt = \pi$$