Calculer l'intégrale définie :

$$\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\tan t\right)dt\,.$$

On remarquera que l'on a : $\cos t+\sin t=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)$.

Analyse

La réécriture de la somme $\cos t+\sin t$ est un grand classique (remarque : on a aussi l'égalité $\cos t+\sin t=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)$ qui peut être utile dans bien d'autres situations). Elle permet ici de transformer l'expression de la fonction à intégrer. Un changement de variable permet de conclure …

Résolution

On a, en tenant compte de l'indication de l'énoncé :

$$\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\tan t\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{\sin t}{\cos t}\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{\cos t+\sin t}{\cos t}\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{\cos t}\right)dt$$

Comme $t\in\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$, on a $\frac{\pi}{4}-t\in\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ et donc $\cos t>0$ et $\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)>0$.

Il vient alors :

$$\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{\cos t}\right)dt=\ln\sqrt{2}\times\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\cos t\right)dt$$

On a immédiatement : $\ln\sqrt{2}\times\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=\frac{1}{2}\ln 2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi\ln 2}{8}$.

Dans l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)dt$, on peut effectuer le changement de variable de classe $\mathscr{C}_1$ de $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ dans $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$: $u \mapsto t = \frac{\pi}{4}-u$ qui donne immédiatement : $dt = -du$ et $u = \frac{\pi}{4}-t$.

On a alors : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln(\cos u)\times(-du) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos u)\,du$.

Il vient alors :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \ln\sqrt{2}\times\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)\,dt \\
&= \frac{\pi\ln 2}{8} + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos u)\,du - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)\,dt}_{=0} \\
&= \frac{\pi\ln 2}{8}
\end{aligned}
$$

Résultat final

$$
\boxed{\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\,dt = \frac{\pi\ln 2}{8}}
$$