Pour tous entiers naturels *n* et *m*, on pose :

$$I_{n,m} = \int_0^1 t^n (1-t)^m \, dt$$

1. Déterminer une relation de récurrence entre $I_{n+1,m}$ et $I_{n,m+1}$.
2. Calculer $I_{n,m}$ pour tous entiers naturels *n* et *m*.

Analyse

La récurrence s'obtient facilement via une intégration par parties. On tire ensuite partie de cette relation pour se ramener au calcul d'une intégrale simple …

Résolution

Question 1.

On a, pour tous entiers naturels *n* et *m* : $I_{n+1,m} = \int_0^1 t^{n+1} (1-t)^m \, dt$.

Telle que posée, la question suggère que nous procédions à une intégration par parties en posant :

- $f(t) = t^{n+1}$ qui donne $f'(t) = (n+1)t^n$.
- $g'(t) = (1-t)^m$ dont une primitive est la fonction *g* définie par :

  $g(t) = -\dfrac{1}{m+1}(1-t)^{m+1}$.

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
I_{n+1,m} &= \int_0^1 t^{n+1} (1-t)^m \, dt \\
&= \cancel{\left[t^{n+1} \times \left(-\frac{1}{m+1}(1-t)^{m+1} \right) \right]_0^1} - \int_0^1 (n+1) t^n \times \left(-\frac{1}{m+1}(1-t)^{m+1} \right) dt \\
&= \frac{n+1}{m+1} \int_0^1 t^n (1-t)^{m+1} \, dt \\
&= \frac{n+1}{m+1} I_{n,m+1}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2,\ I_{n+1,m} = \frac{n+1}{m+1} I_{n,m+1}}$$

Question 2.

En tenant compte de la relation précédente, on a, pour tous entiers naturels n et m :

$$\begin{aligned} I_{n,m} &= \frac{m}{n+1} I_{n+1,m-1} = \frac{m}{n+1} \times \frac{m-1}{n+2} I_{n+2,m-2} = \frac{m}{n+1} \times \frac{m-1}{n+2} \times \frac{m-2}{n+3} I_{n+3,m-3} \\ &= \ldots \\ &= \frac{m}{n+1} \times \frac{m-1}{n+2} \times \frac{m-2}{n+3} \times \ldots \frac{1}{n+m} I_{n+m,0} \end{aligned}$$

On a : $\frac{m}{n+1} \times \frac{m-1}{n+2} \times \frac{m-2}{n+3} \times \ldots \frac{1}{n+m} = \frac{m!}{\frac{(n+m)!}{n!}} = \frac{m!n!}{(n+m)!}$.

Par ailleurs : $I_{n+m,0} = \int_0^1 t^{n+m} (1-t)^0\, dt = \int_0^1 t^{n+m} dt = \left[\frac{1}{n+m+1} t^{n+m+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+m+1}$.

Finalement : $I_{n,m} = \frac{m!n!}{(n+m)!} \times \frac{1}{n+m+1} = \frac{m!n!}{(n+m+1)!} = \frac{1}{(n+m+1) \times \binom{n+m}{n}}$.

$$\boxed{\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2,\ I_{n,m} = \frac{m!n!}{(n+m+1)!} = \frac{1}{(n+m+1) \times \binom{n+m}{n}}}$$