Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, dt$$

1. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
2. Calculer $\lim_{n \to +\infty} I_n$.
3. Déduire des questions précédentes les valeurs des sommes :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$$

Analyse

La récurrence s'obtient facilement en faisant apparaître la dérivée de la fonction tangente. Pour obtenir la limite de la suite (I_n) on en établit d'abord la convergence puis on utilise la relation de récurrence. La dernière question découle, encore une fois, d'une utilisation de la récurrence (sommation d'égalités).

Résolution

Question 1.

On a, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \times \tan^2 t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \times (1 + \tan^2 t - 1) \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \times (1 + \tan^2 t) \, dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, dt = \left[\frac{1}{n+1} \tan^{n+1} t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - I_n \\ &= \frac{1}{n+1} - I_n \end{aligned}.$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \, I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}}$$

Question 2.

Sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$, la fonction tangente prend des valeurs positives. Il en va donc de même pour la fonction $t \mapsto \tan^n t$ et on en conclut : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \geq 0$.
Ainsi, la suite (I_n) est minorée par 0.

Par ailleurs, pour tout entier naturel *n*, on a :

$$\begin{aligned}I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+1} t\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^{n+1} t - \tan^n t\right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \times (\tan t - 1)\,dt\end{aligned}$$

Sur l'intervalle, la fonction tangente prend ses valeurs dans l'intervalle $[0\,;1]$.
On a donc : $\forall t \in \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$, $\tan t - 1 \leq 0$ puis $\tan^n t \times (\tan t - 1) \leq 0$ et enfin :
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \times (\tan t - 1)\,dt \leq 0$.
On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} - I_n \leq 0$: la suite (I_n) est décroissante.

La suite (I_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente. Notons *L* sa limite.

On a, d'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}$.
Comme $\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} I_{n+2} = L$, on obtient en passant à la limite dans l'égalité précédente :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(I_{n+2} + I_n\right) = L + L = 2L = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

On en déduit finalement : $\lim_{n\to+\infty} I_n = L = 0$.

La suite (I_n) est convergente de limite nulle.

Question 3.

En utilisant la relation de récurrence de la première question, il vient :

$$I_1 + I_3 = \frac{1}{2}$$

$$-I_3 - I_5 = \frac{-1}{4}$$

$$I_5 + I_7 = \frac{1}{6}$$

$$\ldots$$

$$(-1)^{p-1} I_{2p-1} + (-1)^{p-1} I_{2p+1} = \frac{(-1)^{p-1}}{2p}$$

En sommant ces p égalités membre à membre, on obtient :

$$I_1 + (-1)^{p-1} I_{2p+1} = \frac{1}{2} + \frac{-1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{(-1)^{p-1}}{2p}$$

Comme $\lim\limits_{p\to+\infty} I_{2p+1} = 0$, on obtient, en considérant les limites de chacun des membres de l'égalité précédente : $I_1 + 0 = \lim\limits_{p\to+\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{-1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{(-1)^{p-1}}{2p}\right) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{2p} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p}$.

Or :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\cos t} dt = -\left[\ln(\cos t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -\left(\ln\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) - \ln(\cos 0)\right) = -\ln\frac{1}{\sqrt{2}} + \ln 1 = \ln\sqrt{2} \\ &= \frac{1}{2}\ln 2 \end{aligned}$$

On a donc : $\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} = I_1 = \frac{1}{2}\ln 2$ et, finalement : $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} = \ln 2$.

On a retrouvé un résultat classique !

On a aussi :

$$
\begin{aligned}
I_0 + I_2 &= 1 \\
-I_2 - I_4 &= \frac{-1}{3} \\
I_4 + I_6 &= \frac{1}{5} \\
&\dots \\
(-1)^p I_{2p} + (-1)^p I_{2p+2} &= \frac{(-1)^p}{2p+1}
\end{aligned}
$$

En sommant ces p égalités membre à membre, on obtient cette fois :

$$I_0 + (-1)^p I_{2p+2} = 1 + \frac{-1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{(-1)^p}{2p+1}$$

Comme $\lim_{p\to+\infty} I_{2p+2} = 0$, on obtient, en considérant les limites de chacun des membres de l'égalité précédente : $I_0 + 0 = \lim_{p\to+\infty}\left(1 + \frac{-1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{(-1)^p}{2p+1}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$.

Or :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^0 t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4}$$

On a donc, finalement : $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = I_0 = \frac{\pi}{4}$.

On a obtenu un autre résultat classique !

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \ln 2$$

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots = \frac{\pi}{4}$$