1. Donner le signe de $3x^2 - 5x + 1$.
2. Sans la calculer, expliquer pourquoi l'intégrale $I = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{3x^2 - 5x + 1}{x^2} dx$ est négative.
3. Calculer *I*.

Analyse

La première question permet, dans la seconde, de montrer que la fonction $x \mapsto \frac{3x^2 - 5x + 1}{x^2}$ garde un signe constant sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e} ; 1\right]$. Dans la troisième question, on tire parti du fait que le dénominateur de la fonction à intégrer est vraiment… très simple !

Résolution

Question 1.

On considère le trinôme du second degré $3x^2 - 5x + 1$. Le discriminant associé vaut $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 25 - 12 = 13$. Le trinôme admet donc les deux racines réelles :
$x_1 = \frac{5 - \sqrt{13}}{6}$ et $x_2 = \frac{5 + \sqrt{13}}{6}$.
Comme le coefficient de « x^2 » est strictement positif, il vient finalement :

- Pour $x \in \left\{\frac{5 - \sqrt{13}}{6} ; \frac{5 + \sqrt{13}}{6}\right\}$, $3x^2 - 5x + 1 = 0$.
- Pour $x \in \left]\frac{5 - \sqrt{13}}{6} ; \frac{5 + \sqrt{13}}{6}\right[$, $3x^2 - 5x + 1 < 0$.
- Pour $x \in \left]-\infty ; \frac{5 - \sqrt{13}}{6}\right[\cup \left]\frac{5 + \sqrt{13}}{6} ; +\infty\right[$, $3x^2 - 5x + 1 < 0$.

Question 2.

A l'aide (ou sans !) de la calculatrice, on montre : $\left[\frac{1}{e}\,;1\right] \subset \left]\frac{5-\sqrt{13}}{6}\,;\frac{5+\sqrt{13}}{6}\right[$.

Or, à la question précédente, on a vu que l'on avait : $3x^2-5x+1<0$ pour tout réel de cet intervalle. Il en ira donc de même pour $\frac{3x^2-5x+1}{x^2}$ sur $\left[\frac{1}{e}\,;1\right]$. La propriété de l'ordre nous permet alors de conclure :

$$\boxed{I=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{3x^2-5x+1}{x^2}\,\mathrm{d}x<0}$$

Question 3.

$$I=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{3x^2-5x+1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\left[3x-5\ln(x)-\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{e}}^{1}$$

$$=3\times1-\cancel{5\ln(1)}-\frac{1}{1}-\left(3\times\frac{1}{e}-5\ln\left(\frac{1}{e}\right)-\frac{1}{\frac{1}{e}}\right)=3-1-\left(\frac{3}{e}+5-e\right)$$

$$=e-3-\frac{3}{e}$$

$$\boxed{I=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{3x^2-5x+1}{x^2}\,\mathrm{d}x=e-3-\frac{3}{e}}$$