

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sqrt{1 \times (n-1)} + \sqrt{2 \times (n-2)} + \dots + \sqrt{(n-1) \times 1} \right)$

Analyse

On fait bien sûr apparaître une somme de Riemann en utilisant judicieusement le facteur « $\frac{1}{n^2}$ ». Le passage à la limite conduit alors au calcul d'une intégrale définie classique...

Résolution

Pour tout entier naturel k dans $\llbracket 1; n-1 \rrbracket$, on a :

$$\frac{1}{n} \sqrt{k \times (n-k)} = \sqrt{\frac{1}{n^2} \times k \times (n-k)} = \sqrt{\frac{k}{n} \times \frac{n-k}{n}} = \sqrt{\frac{k}{n} \times \left(1 - \frac{k}{n}\right)} = f\left(\frac{k}{n}\right)$$

avec $f(x) = \sqrt{x \times (1-x)}$.

On a donc, la fonction f s'annulant en 0 et en 1 :

$$\frac{1}{n^2} \left(\sqrt{1 \times (n-1)} + \sqrt{2 \times (n-2)} + \dots + \sqrt{(n-1) \times 1} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

On en déduit immédiatement, la fonction f étant continue sur l'intervalle $[0; 1]$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sqrt{1 \times (n-1)} + \sqrt{2 \times (n-2)} + \dots + \sqrt{(n-1) \times 1} \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \int_0^1 f(x) dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{x \times (1-x)} dx \end{aligned}$$

On doit donc calculer : $\int_0^1 \sqrt{x \times (1-x)} dx$.

On effectue le changement de variable $x = \cos^2(u)$ avec $u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Il vient alors : $dx = -2 \sin(u) \cos(u) du$.

Puis :

$$-2 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{\cos^2(u) \times (1 - \cos^2(u))} \cos(u) \sin(u) du = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(u) \times \sin^2(u)} \cos(u) \sin(u) du$$

Sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos(u) \geq 0$ et $\sin(u) \geq 0$. D'où :

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(u) \times \sin^2(u)} \cos(u) \sin(u) du &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u) \sin(u) \times \cos(u) \sin(u) du \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) \sin^2(u) du \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} (2 \cos(u) \sin(u))^2 du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2u) du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - \cos(4u)) du \\ &= \frac{1}{4} \left[u - \frac{1}{4} \sin(4u) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\pi) - 0 + \frac{1}{4} \sin(0) \right) \\ &= \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Finalement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sqrt{1 \times (n-1)} + \sqrt{2 \times (n-2)} + \dots + \sqrt{(n-1) \times 1} \right) = \frac{\pi}{8}$.

Résultat final

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sqrt{1 \times (n-1)} + \sqrt{2 \times (n-2)} + \dots + \sqrt{(n-1) \times 1} \right) = \frac{\pi}{8}$$