Soit *f* une fonction continue sur $[0;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour tout entier naturel non nul *n*, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) f\left(\frac{k}{n}\right)$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la même limite que celle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Analyse

Dans la première question, on identifie sans difficulté une somme de Riemann associée à une fonction continue sur un segment. Dans la seconde question, on doit penser à l'équivalence, pour *k* fixé : $\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{k}{n^2}$ …

Résolution

Question 1.

Pour tout entier naturel *n* non nul, on a : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

On reconnaît une somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto x\, f(x)$ qui est continue sur l'intervalle $[0\,;1]$ comme produit de deux telles fonctions. On a alors immédiatement la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et, plus précisément : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 x\, f(x)\,\mathrm{d}x$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\int_0^1 x\, f(x)\,\mathrm{d}x$.

Question 2.

Pour n fixé non nul, on a $k \in [\![1\,;n]\!]$ et donc : $\forall k \in [\![1\,;n]\!],\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{k}{n^2} = 0$.

On a donc : $\forall k \in [\![1\,;n]\!],\ \sin\left(\dfrac{k}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{k}{n^2}$.

Soit alors $\varepsilon > 0$ fixé.
D'après l'équivalence précédente, il existe un entier naturel N_ε tel que :

$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \left| \dfrac{\sin\left(\dfrac{k}{n^2}\right)}{\dfrac{k}{n^2}} - 1 \right| \leq \varepsilon$, soit $\left| \sin\left(\dfrac{k}{n^2}\right) - \dfrac{k}{n^2} \right| \leq \varepsilon \dfrac{k}{n^2}$.

Pour tout entier naturel $n > N_\varepsilon$ on a alors :

$$\begin{aligned}
|v_n - u_n| &= \left| \sum_{k=1}^{n} \left(\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2} \right) . f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \left| \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2} \right| . \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \left| \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2} \right| . \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| + \sum_{k=N_\varepsilon}^{n} \left| \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2} \right| . \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \left| \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2} \right| . \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| + \sum_{k=N_\varepsilon}^{n} \varepsilon \frac{k}{n^2} . \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \left| \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2} \right| . \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| + \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} . \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right|
\end{aligned}$$

Pour k fixé dans $[\![1\,;N_\varepsilon]\!]$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\dfrac{k}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{k}{n^2} = 0$ et, par continuité de f :

$\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{k}{n}\right) = f(0)$. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left| \sin\left(\dfrac{k}{n^2}\right) - \dfrac{k}{n^2} \right| . \left| f\left(\dfrac{k}{n}\right) \right| = 0$ et enfin, la somme comportant un nombre fini de termes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \left| \sin\left(\dfrac{k}{n^2}\right) - \dfrac{k}{n^2} \right| . \left| f\left(\dfrac{k}{n}\right) \right| = 0$.

Il existe donc un entier naturel N tel que : $n \geq \max(N_\varepsilon, N) \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \left| \sin\left(\dfrac{k}{n^2}\right) - \dfrac{k}{n^2} \right| . \left| f\left(\dfrac{k}{n}\right) \right| \leq \varepsilon$.

On a par ailleurs : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n^2} . \left| f\left(\dfrac{k}{n}\right) \right| = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n} . \left| f\left(\dfrac{k}{n}\right) \right|$.

La fonction f étant continue sur le segment $[0\,;1]$, il en va de même pour la fonction $|f|$ et pour la fonction $x \mapsto x.\left| f(x) \right|$.

On en déduit que la suite de terme général $w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}.\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$ converge et :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}.\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}.\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \int_0^1 x.\left|f(x)\right|\mathrm{d}x\,.$$

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant croissante, il vient : $\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}.\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \le \varepsilon\int_0^1 x.\left|f(x)\right|\mathrm{d}x$.

D'après ce qui précède, on a :

$$n \ge \max(N_\varepsilon, N) \Rightarrow \sum_{k=1}^{N_\varepsilon}\left|\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)-\frac{k}{n^2}\right|.\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \le \varepsilon + \varepsilon\int_0^1 x.\left|f(x)\right|\mathrm{d}x = \left(1+\int_0^1 x.\left|f(x)\right|\mathrm{d}x\right)\varepsilon$$

La différence $|v_n - u_n|$ pouvant être rendue arbitrairement petite, on conclut :

$$\lim_{n\to+\infty}|v_n - u_n| = 0$$

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, le résultat précédent nous permet de conclure qu'il en va de même pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et que ces deux suites ont même limite.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la même limite que celle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.