

Résoudre :

$$\ln(x^2 - 4x + 3) = \ln(-x^2 + 6x - 8) \quad (\text{E})$$

---

## Analyse

Il convient dans un premier temps d'étudier les signes des fonctions polynômes  $f_1(x) = x^2 - 4x + 3$  et  $f_2(x) = -x^2 + 6x - 8$  puisqu'il est nécessaire que les arguments du logarithme népérien soient strictement positifs.

---

## Résolution

On obtient facilement les racines des polynômes  $X^2 - 4X + 3$  et  $-X^2 + 6X - 8$  :

$$\begin{aligned} X^2 - 4X + 3 &= (X - 1)(X - 3) \text{ d'où } f_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3 \\ -X^2 + 6X - 8 &= -(X - 2)(X - 4) \text{ d'où } f_2(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 4 \end{aligned}$$

Le coefficients de  $x^2$  dans l'expression de  $f_1$  étant positif, on a :

$$f_1(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ ou } x > 3 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, 1[ \cup ]3, +\infty[$$

Le coefficients de  $x^2$  dans l'expression de  $f_2$  étant négatif, on a :

$$f_2(x) < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 4 \Leftrightarrow x \in ]2, 4[$$

On en déduit donc :

$$\begin{cases} f_1(x) > 0 \\ f_2(x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in ]-\infty, 1[ \cup ]3, +\infty[ \\ x \in ]2, 4[ \end{cases} \Leftrightarrow x \in ]3, 4[$$

Nous recherchons donc des solutions dans l'intervalle  $]3, 4[$ .

Dans ces conditions, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} \ln(x^2 - 4x + 3) &= \ln(-x^2 + 6x - 8) \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 &= -x^2 + 6x - 8 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 11 &= 0 \end{aligned}$$

Réolvons l'équation  $2x^2 - 10x + 11 = 0$  dans  $\mathbb{R}$ .

Le discriminant réduit s'écrit :  $\Delta' = (-5)^2 - 2 \times 11 = 25 - 22 = 3$ . On en tire les deux solutions réelles de l'équation :

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{3}}{2} \approx 1,634 \text{ et } x_2 = \frac{5 + \sqrt{3}}{2} \approx 3,366$$

Mais comme nous recherchons des valeurs de  $x$  dans l'intervalle  $]3,4[$ , seule  $x_2$  satisfait à cette condition et est solution de l'équation initiale (E).

---

## Résultat final

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est le singleton :

$$S = \left\{ \frac{5 + \sqrt{3}}{2} \right\}$$