Résoudre :

$$\begin{cases} \ln(xy) = 2 \\ (\ln x)(\ln y) = -3 \end{cases} \qquad \text{(E)}$$

Analyse

On pose les conditions d'existence des logarithmes népériens puis on résout le système en introduisant des variables auxiliaires.

Résolution

Préambule : les variables x et y jouent des rôles symétriques. En effet, si (x_0, y_0) est solution du système alors (y_0, x_0) est également un couple solution.

$\ln x$ et $\ln y$ sont définis si, et seulement si, $x > 0$ et $y > 0$. Dans ces conditions, on a : $xy > 0$ et $\ln(xy)$ est défini.

Introduisons les deux nouvelles variables X et Y définies par :

$$\begin{cases} X = \ln x \\ Y = \ln y \end{cases}$$

Comme $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, le système initial se récrit :

$$\begin{cases} X + Y = 2 \\ XY = -3 \end{cases}$$

X et Y sont donc les racines réelles, si elles existent, de l'équation : $x^2 - 2x - 3 = 0$.

On constate aisément que cette équation admet $x_1 = -1$ comme racine évidente. On en tire alors la deuxième : $x_2 = 3$.

On en déduit alors : $X = -1$ et $Y = 3$ ou $X = 3$ et $Y = -1$.

Pour $X=-1$ et $Y=3$, il vient :

$$\begin{cases} X=-1 \\ Y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x=-1 \\ \ln y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=e^{-1} \\ y=e^{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{e} \\ y=e^{3} \end{cases}$$

On obtient le premier couple solution : $\left(\dfrac{1}{e},e^{3}\right)$.

D'après le préambule, le deuxième couple solution (obtenu avec $X=3$ et $Y=-1$) s'écrit : $\left(e^{3},\dfrac{1}{e}\right)$.

Résultat final

L'ensemble des solutions du système (E) est l'ensemble :

$$S=\left\{\left(\frac{1}{e},e^{3}\right),\left(e^{3},\frac{1}{e}\right)\right\}$$