Résoudre :

$$\ln\left(x^2-5\right)=\ln\left(7x-15\right) \qquad \text{(E)}$$

Analyse

Avant d'écrire l'égalité des arguments, il convient de préciser l'ensemble dans lequel on cherche les solutions de l'équation. C'est à dire, l'ensemble pour lequel les logarithmes sont définis.

Résolution

La fonction $\ln\left(x^2-5\right)$ est définie pour tout x tel que : $x^2-5>0$; la fonction $\ln\left(7x-15\right)$ est définie pour tout x tel que : $7x-15>0$.

On a :

$$\begin{cases} x^2-5>0 \\ 7x-15>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)>0 \\ x>\dfrac{15}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left]-\infty\,;-\sqrt{5}\right[\cup\left]\sqrt{5}\,;+\infty\right[\\ x\in\left]\dfrac{15}{7}\,;+\infty\right[\end{cases}$$

Or : $\left(\dfrac{15}{7}\right)^2=\dfrac{225}{49}<\dfrac{5\times 49}{49}=\dfrac{245}{49}=5$, d'où : $\dfrac{15}{7}<\sqrt{5}$.

On a donc : $\begin{cases} x^2-5>0 \\ 7x-15>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left]\sqrt{5}\,;+\infty\right[$.

On cherche donc les solutions de (E) dans l'intervalle $\left]\sqrt{5}\,;+\infty\right[$.

On peut alors écrire :

$$(E)\Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left]\sqrt{5}\,;+\infty\right[\\ x^2-5=7x-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left]\sqrt{5}\,;+\infty\right[\\ x^2-7x+10=0 \end{cases}$$

La résolution de l'équation du second degré ne pose pas de problème particulier.

Le discriminant s'écrit : $\Delta=(-7)^2-4\times 10=49-40=9=3^2$.

On en tire les deux racines :

$$x_1 = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
$$x_2 = \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

La condition $x \in \left]\sqrt{5}\,;+\infty\right[$ nous conduit à éliminer x_1 puisque $\sqrt{5} > 2$.

On a donc :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left]\sqrt{5},+\infty\right[\\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$$

C'est à dire :

$$S = \{5\}$$

Résultat final

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est le singleton : $S = \{5\}$