Résoudre :

$$(5-x)\ln\left(x^2-3x-9\right)=0 \qquad \text{(E)}$$

Analyse

On considère la fonction *f* définie par : $f(x)=(5-x)\ln\left(x^2-3x-9\right)$. C'est un produit de deux fonctions « classiques ». Ce produit est nul si, et seulement si, l'un des deux facteurs est nul.

Résolution

D'après ce qui précède et en tenant compte du fait que l'argument du logarithme népérien doit être strictement positif, on a :

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-9>0 \\ 5-x=0 \text{ ou } \ln\left(x^2-3x-9\right)=0 \end{cases}$$

$5-x=0 \Leftrightarrow x=5$.

Par ailleurs, le logarithme népérien ne s'annule que lorsque son argument est égal à 1.

D'où : $\ln\left(x^2-3x-9\right)=0 \Leftrightarrow x^2-3x-9=1 \Leftrightarrow x^2-3x-10=0$ (E').

Le discriminant de l'équation (E') vaut : $\Delta=(-3)^2-4(-10)=9+40=49=7^2$.

Les deux solutions de (E') sont donc : $x_1=\dfrac{-(-3)-7}{2}=-2$ et $x_2=\dfrac{-(-3)+7}{2}=5$.

L'équation (E) admet donc deux solutions –2 et 5, cette dernière valeur annulant les deux facteurs de *f*.

Résultat final

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est la paire : $S=\{-2\,;5\}$