Résoudre :

$$\ln\left(\frac{1}{x}+2\right)>0 \qquad \text{(E)}$$

Analyse

On considère la fonction *f* définie par : $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x}+2\right)$. C'est la composée de deux fonctions « classiques ». Pour déterminer le signe de *f*, on utilise le fait que le logarithme népérien est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et s'annule lorsque son argument vaut 1.

Résolution

Afin de préciser la discussion, il est intéressant de déterminer l'ensemble de définition, D_f, de la fonction *f*.

On a immédiatement $0\notin D_f$ puisque *x* est au dénominateur de l'argument du logarithme népérien.

On a ensuite :

$$x\in D_f \Leftrightarrow \frac{1}{x}+2>0 \Leftrightarrow \frac{1+2x}{x}>0 \Leftrightarrow x(1+2x)>0 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]0\,;+\infty\right[.$$

On recherche donc les solutions de (E) dans l'ensemble : $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]0\,;+\infty\right[$.

D'après le préambule, la fonction *f* prendra des valeurs strictement positives si, et seulement si, l'argument du logarithme népérien, $\frac{1}{x}+2$, est strictement supérieur à 1. C'est à dire :

$$f(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}+2>1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}>-1$$

On distingue ici distinguer deux cas.

- Supposons $x \in \left]0\,;+\infty\right[$. Alors $\frac{1}{x} > 0$ et l'inégalité $\frac{1}{x} > -1$ est toujours vérifiée.
- Supposons $x \in \left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[$. Comme $x < 0$, on a : $\frac{1}{x} > -1 \Leftrightarrow x < -1$.

  D'où : $x \in \left]-\infty\,;-1\right[$.

Finalement, l'ensemble solution de (E) est $\left]-\infty\,;-1\right[\cup \left]0\,;+\infty\right[$.

Résultat final

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est $\left]-\infty\,;-1\right[\cup \left]0\,;+\infty\right[$.