Résoudre :

$$(x-3)\ln(x+2)>0 \qquad \text{(E)}$$

Analyse

On considère la fonction *f* définie par : $f(x)=(x-3)\ln(x+2)$. Comme produit de deux facteurs, elle prend des valeurs strictement positives si, et seulement si, les facteurs sont de mêmes signes.

Résolution

Commençons par déterminer l'ensemble de définition, D_f, de la fonction *f*.

On a : $x\in D_f \Leftrightarrow x+2>0 \Leftrightarrow x>-2 \Leftrightarrow x\in\,]-2\,;+\infty[\, \Leftrightarrow D_f=\,]-2\,;+\infty[$.

D'où : $D_f=\,]-2\,;+\infty[$.

On recherche donc les solutions de (E) dans l'intervalle : $]-2\,;+\infty[$.

D'après le préambule, la fonction *f* prendra des valeurs strictement positives si, et seulement si, les facteurs $x-3$ et $\ln(x+2)$ sont de mêmes signes.

Les signes des facteurs se déterminent simplement :

- $x-3>0 \Leftrightarrow x\in\,]3\,;+\infty[$;
- $x-3<0 \Leftrightarrow x\in\,]-\infty\,;3[$.

et :

- $\ln(x+2)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x+2>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow x>-1 \Leftrightarrow x\in\,]-1\,;+\infty[$;
- $\ln(x+2)<0 \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x+2<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x<-1 \end{cases} \Leftrightarrow -1>x>-2 \Leftrightarrow x\in\,]-2\,;-1[$.

On tire, de ce qui précède, le tableau suivant :

x	-2		-1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln(x+2)$	||	$-$	0	$+$		$+$	
$(x-3)\ln(x+2)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

Il vient alors :

$$(x-3)\ln(x+2)>0 \Leftrightarrow x\in\left]-2\,;-1\right[\cup\left]3\,;+\infty\right[$$

Résultat final

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble : $\left]-2\,;-1\right[\cup\left]3\,;+\infty\right[$.