

Déterminer la primitive de la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 + 5}$$

et s'annulant en 2.

Analyse

Notons d'abord que la fonction f est une fonction rationnelle (rapport de deux polynômes) définie sur \mathbb{R} (le dénominateur ne peut s'annuler).

On constate ensuite que le numérateur est un polynôme du premier degré alors que le dénominateur est un polynôme du second degré ... On doit alors s'efforcer de faire apparaître la dérivée du dénominateur.

Résolution

La dérivée de la fonction $u : x \mapsto u(x) = x^2 + 5$ est la fonction $u' : x \mapsto u'(x) = 2x$.

On peut alors écrire :

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 + 5} = \frac{3}{2} \times \frac{2x}{x^2 + 5} = \frac{3}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Pour tout x réel, on a : $x^2 \geq 0$, donc : $x^2 + 5 > 0$.

En d'autres termes, la fonction u prend des valeurs strictement positives sur \mathbb{R} .

Les primitives du rapport $\frac{u'}{u}$ sont alors les fonctions $\ln u + k$ où k est une constante réelle.

Les primitives de la fonction f sont donc les fonctions définies par :

$$x \mapsto \ln(x^2 + 5) + k, \text{ où } k \text{ est une constante réelle.}$$

On cherche la primitive s'annulant en 2.

Cette condition équivaut à : $\ln(2^2 + 5) + k = 0$, soit : $k = -\ln(2^2 + 5) = -\ln 9$

La primitive cherchée est donc définie par : $x \mapsto \ln(x^2 + 5) - \ln 9 = \ln\left(\frac{x^2 + 5}{9}\right)$.

Résultat final

La primitive de la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 + 5}$$

et s'annulant en 2 est la fonction F définie par :

$$F(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 5}{9}\right)$$