Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln \frac{5x^2}{5x^2+2}$$

a. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f ;

b. Montrer que pour tout x de D_f on a : $f(x) < 0$.

Analyse

L'essentiel des difficultés se situent au niveau de l'argument du logarithme népérien qui, ici, est une fonction rationnelle. Il convient d'observer attentivement le dénominateur de cette fonction …

Résolution

Le logarithme népérien n'est défini que si l'expression $\frac{5x^2}{5x^2+2}$ est strictement positive.

Pour tout x réel, on a :

- $5x^2 \geq 0$ et cette expression n'est nulle que pour $x = 0$;
- $5x^2 + 2 > 0$.

Le rapport $\frac{5x^2}{5x^2+2}$ prend donc des valeurs positives et ne s'annule que pour $x = 0$. Cette valeur est la seule qui pose donc un problème.

Finalement :

$$\boxed{D_f = \mathbb{R}^*}$$

Pour tout x réel, on a immédiatement : $5x^2 + 2 > 5x^2$.

Comme l'expression $5x^2 + 2$ ne s'annule pas, il vient : $\frac{5x^2}{5x^2+2} < 1$.

Plus précisément, pour tout x de D_f, on a : $0 < \frac{5x^2}{5x^2+2} < 1$.

Finalement, pour tout x de D_f : $\ln \frac{5x^2}{5x^2+2} < 0$.

Résultat final

L'ensemble de définition de la fonction f définie par : $f(x) = \ln \frac{5x^2}{5x^2+2}$ est $D_f = \mathbb{R}^*$ et la fonction f prend des valeurs strictement négatives sur cet ensemble.