Déterminer les primitives de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$f(x)=\frac{-5x^3+13x^2-7x+56}{2x}$$

Analyse

En « découpant » la fonction *f*, qui est une fonction rationnelle, on fait apparaître des fonctions de référence …

Résolution

On a, sur $\mathbb{R}^{+*}$: $f(x)=\dfrac{-5x^3+13x^2-7x+56}{2x}=-\dfrac{5}{2}x^2+\dfrac{13}{2}x-\dfrac{7}{2}+\dfrac{28}{x}$.

Ainsi, la fonction *f* est la somme d'une fonction polynôme ($x\mapsto -\dfrac{5}{2}x^2+\dfrac{13}{2}x-\dfrac{7}{2}$) et, à un facteur multiplicatif près de la fonction inverse.

L'intégration se fait alors en deux étapes :

- $x\mapsto -\dfrac{5}{2}x^2+\dfrac{13}{2}x-\dfrac{7}{2}$ admet comme primitive sur $\mathbb{R}$: $x\mapsto -\dfrac{5}{6}x^3+\dfrac{13}{4}x^2-\dfrac{7}{2}x$;
- $x\mapsto \dfrac{28}{x}$ admet comme primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$: $x\mapsto 28\ln x$.

La fonction $x\mapsto -\dfrac{5}{6}x^3+\dfrac{13}{4}x^2-\dfrac{7}{2}x+28\ln x$ est donc une primitive de *f* sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Les primitives de la fonction *f* sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont donc les fonctions de la forme :

$$x\mapsto -\frac{5}{6}x^3+\frac{13}{4}x^2-\frac{7}{2}x+28\ln x+k\text{ , où }k\in\mathbb{R}$$

Résultat final

Les primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$f(x) = \frac{-5x^3 + 13x^2 - 7x + 56}{2x}$$

sont les fonctions définies par :

$$x \mapsto -\frac{5}{6}x^3 + \frac{13}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + 28\ln x + k \text{ , où } k \in \mathbb{R} .$$