1. Déterminer les primitives de la fonction f définie sur $]-5;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{x+5}$$

2. Déterminer la primitive de la fonction f s'annulant en 11.

Analyse

On doit reconnaître en $f(x)$ l'expression de la dérivée d'une composée « classique » …

Résolution

Question a.

On a, $f(x)=\dfrac{1}{x+5}=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x)=x+5$.

Pour tout réel x de $]-5;+\infty[$, on a : $u(x)>0$.

Une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est alors $\ln u$, c'est à dire la fonction définie par : $x\mapsto \ln(x+5)$.

Les primitives de f sur $]-5;+\infty[$ sont alors les fonctions définies par :

$$x\mapsto \ln(x+5)+k\text{, où } k \text{ est une constante réelle}$$

Question b.

Soit F la primitive cherchée.

D'après la question précédente, F est de la forme :

$$F: x\mapsto \ln(x+5)+k$$

On veut $F(11)=0$.

Le réel k doit donc vérifier l'équation : $\ln(11+5)+k=0$.

D'où : $k=-\ln 16=-\ln 2^4=-4\ln 2$

Finalement, on a : $F(x)=\ln(x+5)-4\ln 2=\ln(x+5)-\ln 16=\ln\dfrac{x+5}{16}$.

Résultat final

Les primitives de la fonction f définie sur $]-5;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{x+5}$$

sont les fonctions définies par :

$x \mapsto \ln(x+5)+k$, où k est une constante réelle

La primitive de la fonction f s'annulant en 11 est définie par :

$$F(x)=\ln(x+5)-4\ln 2=\ln\frac{x+5}{16}$$