Déterminer les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{x}{x^2+5}$$

Analyse

La fonction f est une fonction rationnelle et le numérateur est « proche » de la dérivée du dénominateur …

Résolution

On a, $f(x)=\frac{x}{x^2+5}=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2+5}=\frac{1}{2}\times\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x)=x^2+5$.

Pour tout réel x, on a : $u(x)>0$.

Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est alors $\ln u$, c'est à dire la fonction définie par : $x\mapsto\ln\left(x^2+5\right)$.

Les primitives de f sur $\left]-5\,;+\infty\right[$ sont alors les fonctions définies par :

$$x\mapsto\frac{1}{2}\ln\left(x^2+5\right)+k\text{, où } k \text{ est une constante réelle}$$

Remarque : on peut fournir le résultat sous une autre forme en tenant compte du fait que pour tout x réel on a : $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+5\right)=\ln\sqrt{x^2+5}$.

Résultat final

Les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{x}{x^2+5}$$

sont les fonctions définies par :

$x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(x^2+5\right)+k$, où k est une constante réelle.