1. Déterminer la dérivée de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$f(x) = x\ln x - x$$

2. Déduire de la question précédente les primitives de la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3. Déterminer la primitive du logarithme népérien qui s'annule pour $x = e^2$.

Analyse

La fonction *f* est une fonction « classique » mais vous ne le savez peut-être pas encore. La première question, qui ne pose pas de difficulté particulière, va vous montrer en quoi …

Résolution

Question 1.

On a : $f'(x) = 1\times\ln x + x\times\frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$.

Pour tout réel x strictement positif, on a : $\boxed{f'(x) = \ln x}$

La fonction *f* est donc une primitive du logarithme népérien sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Question 2.

A partir du résultat obtenu à la question précédente, on peut écrire que les primitives du logarithme népérien sont les fonctions de la forme :

$x \mapsto x\ln x - x + k$, où k est une constante réelle.

Question 2.

Soit F la primitive cherchée.

Puisqu'il s'agit d'une primitive du logarithme népérien, $F(x)$ est de la forme :

$$F(x) = x\ln x - x + k$$

Où k est une constante réelle à déterminer.

La fonction F doit s'annuler pour $x = e^2$.
Le réel k doit donc vérifier l'équation : $e^2 \ln e^2 - e^2 + k = 0$
Soit : $e^2 \times 2\ln e - e^2 + k = 0$.

D'où, en tenant compte de $\ln e = 1$: $e^2 + k = 0$.
On en tire finalement : $k = -e^2$

La primitive cherchée est donc définie par :

$$\boxed{F(x) = x\ln x - x - e^2}$$

Résultat final

1. La dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

   $$f(x) = x\ln x - x$$

   est la fonction logarithme népérien.

2. Les primitives de la fonction logarithme népérien sont les fonctions définies par :

   $$x \mapsto x\ln x - x + k$$

   où k est une constante réelle.

3. La primitive du logarithme népérien s'annulant pour $x = e^2$ est la fonction définie par :

   $$F(x) = x\ln x - x - e^2$$