Soit la fonction *f* définie par :

$$f\left(x\right)=\frac{x+3}{x^2+6x}$$

a. Déterminer l'ensemble de définition D_f de *f*.

b. Déterminer les primitives de la fonction *f* sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

c. Déterminer la primitive *F* de la fonction *f* sur $\left]0\,;+\infty\right[$ qui vérifie $F\left(1\right)=0$.

d. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction *F* au point d'abscisse 1.

Analyse

L'essentiel des difficultés se situent au niveau de la deuxième question. On doit trouver un lien simple entre le numérateur et le dénominateur de *f*.

Résolution

Question a.

La fonction *f* est une fonction rationnelle. Pour déterminer son ensemble de définition, on doit déterminer les valeurs de *x* qui annulent le dénominateur.
On a : $x^2+6x=x\left(x+6\right)$.

$x^2+6x=0$ équivaut donc à $x\left(x+6\right)=0$.

On en déduit que le dénominateur de la fonction *f* s'annule pour $x=-6$ et $x=0$.
On en déduit finalement :

$$\boxed{\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\left\{-6;0\right\}=\left]-\infty;-6\right[\cup\left]-6;0\right[\cup\left]0;+\infty\right[}$$

Question b.

Intéressons-nous à la dérivée du dénominateur de la fonction *f*.
La dérivée de la fonction $x\mapsto x^2+6x$ est la fonction $x\mapsto 2x+6$.

Or, pour tout x réel, on a : $2x+6=2(x+3)$.

On a donc : $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2+6x}=\dfrac{\frac{1}{2}(2x+6)}{x^2+6x}=\dfrac{1}{2}\dfrac{2x+6}{x^2+6x}=\dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x)=x^2+6x$.

Sur $]0\,;+\infty[$, on a : $u(x)>0$, une primitive de la fonction $x\mapsto\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ est alors la fonction $x\mapsto\ln u(x)$.

On en déduit qu'une primitive de la fonction *f* sur $]0\,;+\infty[$ est la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+6x\right)$.

Les primitives de la fonction *f* sur $]0\,;+\infty[$ sont donc les fonctions définies par :

$x\mapsto\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+6x\right)+k$, où *k* est une constante réelle

Question c.

En tant que primitive de la fonction *f*, la fonction *F* est de la forme :

$$x\mapsto\frac{1}{2}\ln\left(x^2+6x\right)+k$$

F doit vérifier $F(1)=0$. Or, $F(1)=\dfrac{1}{2}\ln\left(1^2+6\times1\right)+k=\dfrac{1}{2}\ln 7+k$.

Le réel *k* doit donc vérifier l'équation : $\dfrac{1}{2}\ln 7+k=0$.

Il vient alors : $k=-\dfrac{1}{2}\ln 7=-\ln\sqrt{7}=\ln\dfrac{1}{\sqrt{7}}=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{7}$.

On a alors : $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+6x\right)+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2+6x}{7}=\ln\sqrt{\dfrac{x^2+6x}{7}}$.

Question d.

Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction *F* au point d'abscisse 1 s'écrit :

$$y=F'(1)\times(x-1)+F(1)$$

La dérivée de la fonction *F* étant la fonction *f*, on a : $F'(1)=f(1)=\dfrac{1+3}{1^2+6\times1}=\dfrac{4}{7}$.

Par ailleurs : $F(1)=0$ (voir question précédente).

D'où :

$$\boxed{y=\frac{4}{7}(x-1)}$$

Résultat final

a. L'ensemble de définition de la fonction *f* définie par : $f(x)=\frac{x+3}{x^2+6x}$ est :

$$D_f=\mathbb{R}\setminus\{-6;0\}\ ;$$

b. Les primitives de la fonction *f* sur $]0\,;+\infty[$ sont définies par :

$$x\longmapsto\frac{1}{2}\ln\left(x^2+6x\right)+k\text{ , où }k\text{ est une constante réelle}$$

c. La primitive *F* de la fonction *f* sur $]0\,;+\infty[$ qui vérifie $F(1)=0$ est définie par :

$$F(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+6x}{7}=\ln\sqrt{\frac{x^2+6x}{7}}$$

d. Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction *F* au point d'abscisse 1 est :

$$y=\frac{4}{7}(x-1)$$