

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln(\ln x)$$

- Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
- Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de D_f .
- Déterminer le sens de variation de la fonction f .
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique notée α . Déterminer α .
- Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse α .

Analyse

La fonction proposée peut dérouter ... Pourtant, il s'agit d'une composée : celle du logarithme népérien suivi de lui-même ! L'exercice requiert donc une bonne maîtrise de cette fonction et des résultats relatifs aux fonctions composées.

Résolution

Question a.

$\ln(\ln x)$ existe si l'on peut calculer le logarithme népérien de $\ln x$. Un tel calcul n'est possible qu'à la condition que $\ln x$ soit strictement positif.
On doit donc résoudre : $\ln x > 0$.

$\ln x > 0$ équivaut à $\ln x > \ln 1$; cette deuxième inéquation équivaut, le logarithme népérien étant une fonction strictement croissante, à : $x > 1$.

On a donc, finalement :

$$\mathcal{D}_f =]1; +\infty[$$

Question b.

Cherchons d'abord : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$.

On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \ln x = 0^+$.

Il vient donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \ln(\ln x) = \lim_{\substack{X \rightarrow 0 \\ X > 0}} \ln X = -\infty$

D'où, finalement :

$$\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty}$$

Cherchons maintenant : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

Il vient donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\ln x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$

D'où, finalement :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

Question c.

La fonction f est la composée de deux fonctions strictement croissantes (le logarithme népérien et ... lui-même !), elle est donc strictement croissante sur son ensemble de définition.

La fonction f est strictement croissante sur son ensemble de définition.

Remarque : on peut également retrouver ce résultat après avoir établi la dérivabilité de f sur \mathcal{D}_f , déterminé la dérivée f' (on obtient : $f'(x) = \frac{1}{x \ln x}$) et étudié son signe.

Question d.

En tant que fonction dérivable sur $]1; +\infty[$, la fonction f est continue sur cet intervalle.

Par ailleurs, la fonction f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$ (question c.).

Enfin, les limites aux bornes sont de signes opposés (question b.).

D'après ce qui précède et grâce au théorème des valeurs intermédiaires, on peut conclure que la fonction f s'annule pour une unique valeur α de l'intervalle $]1; +\infty[$.

On résout $f(x) = 0$.

Cette équation équivaut à : $\ln(\ln x) = 0$; soit : $\ln(\ln x) = \ln 1$.

D'où : $\ln x = 1 = \ln e$.

Finalement : $x = e$.

On a donc :

$$\boxed{\alpha = e}$$

Question e.

Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse e s'écrit :

$$y = f'(e) \times (x - e) + f(e) \quad (\text{E})$$

On a : $f'(x) = \frac{1}{x \ln x}$, d'où : $f'(e) = \frac{1}{e \ln e} = \frac{1}{e}$.

Par ailleurs, d'après la question précédente, on a : $f(e) = 0$.

L'équation (E) ci-dessus se réécrit alors : $y = \frac{1}{e}(x - e)$.

Soit, finalement :

$$\boxed{y = \frac{x}{e} - 1}$$