Soit a et b deux réels et f la fonction définie par :

$$f(x) = \ln(ax + b)$$

Déterminer les réels a et b de telle sorte que la courbe représentative de la fonction f coupe l'axe des abscisses au point $\mathrm{A}(2\,;0)$ et y admette une tangente parallèle à la première bissectrice.

Analyse

Deux paramètres à déterminer, deux données relatives à f et à sa dérivée en un point. Ces deux données sont à exprimer analytiquement et vont fournir les deux relations requises pour pouvoir calculer les deux paramètres.

Résolution

Comme la courbe représentative de la fonction f passe par le point $\mathrm{A}(2\,;0)$, on a immédiatement : $f(2) = 0$. Soit : $\ln(2a + b) = 0$.

On en tire immédiatement : $2a + b = 1 \qquad (1)$.

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point $\mathrm{A}(2\,;0)$ est égal à $f'(2)$. Comme on souhaite que cette tangente soit parallèle à la première bissectrice et que le coefficient directeur est égal à 1, on veut : $f'(2) = 1$.

Mais pour tout x où f est dérivable, on a : $f'(x) = \dfrac{a}{ax + b}$.

On veut donc : $\dfrac{a}{2a + b} = 1 \qquad (2)$.

En utilisant l'égalité (1), l'égalité (2) donne immédiatement : $\boxed{a = 1}$.

L'égalité (1) se récrit alors : $2 + b = 1$, soit $\boxed{b = -1}$.

Finalement, la fonction f est définie par :

$$f(x) = \ln(x - 1)$$

Complément

A titre de complément, nous fournissons la courbe représentative de la fonction *f* qui se déduit de celle de la fonction logarithme népérien par la translation de vecteur $\vec{i}$.