Démontrer que le logarithme décimal de 2 est un nombre irrationnel.

Analyse

On revient à la définition du logarithme décimal (sous une forme ou sous une autre) puis on mène un raisonnement pas l'absurde qui s'achève rapidement via un peu d'arithmétique élémentaire.

Résolution

Par définition du logarithme décimal, $x = \log 2$ est l'unique réel vérifiant : $10^x = 2$.

On a aussi, de façon équivalente : $x = \dfrac{\ln 2}{\ln 10}$.

Supposons alors que x soit rationnel. On peut donc l'écrire : $x = \dfrac{p}{q}$ où p et q sont deux entiers premiers entre eux.

On a alors : $10^x = 2 \Leftrightarrow 10^{\frac{p}{q}} = 2 \Rightarrow \left(10^{\frac{p}{q}}\right)^q = 2^q \Leftrightarrow 10^p = 2^q \Leftrightarrow 2^p 5^p = 2^q$.

On en tire nécessairement que l'exposant de 5 est nul : $p = 0$ puis que $p = q = 0$, ce qui est absurde.

En définitive, x n'est pas rationnel.
Le résultat est établi.

Résultat final

Le logarithme décimal de 2 n'est pas rationnel.