

Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$.

Soit f la fonction définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)} \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est croissante.

Analyse

Dans cet exercice, il convient de bien distinguer, à toutes les étapes, la variable des paramètres. S'il semble assez naturel de dériver la fonction f , il convient de choisir une expression pratique de $f'(x)$ pour en étudier facilement le signe.

Résolution

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 1+bx > 1$ et donc $\ln(1+bx) > 0$. Ainsi, la fonction f est bien définie sur \mathbb{R}_+^* .

Comme rapport de deux fonctions dérivables sur cet intervalle, elle y est elle-même dérivable et on a, pour tout réel x strictement positif :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{a}{1+ax} \ln(1+bx) - \frac{b}{1+bx} \ln(1+ax)}{(\ln(1+bx))^2} \\ &= \frac{ab}{(1+ax)(1+bx)} \left[\frac{(1+bx) \ln(1+bx)}{b} - \frac{(1+ax) \ln(1+ax)}{a} \right] \\ &= \frac{ab}{(1+ax)(1+bx)} \times \frac{1}{(\ln(1+bx))^2} \times \left[\frac{(1+bx) \ln(1+bx)}{b} - \frac{(1+ax) \ln(1+ax)}{a} \right] \end{aligned}$$

Pour tout réel x strictement positif, on a immédiatement :

$$\frac{ab}{(1+ax)(1+bx)} \times \frac{1}{(\ln(1+bx))^2} > 0$$

Il convient donc d'étudier le signe de la différence :

$$\frac{(1+bx)\ln(1+bx)}{b} - \frac{(1+ax)\ln(1+ax)}{a}$$

Plus précisément, comme l'énoncé demande d'établir la croissance de la fonction f , il convient de montrer que la différence précédente est positive. Soit, en définitive :

$$\forall (a, b, x) \in (\mathbb{R}_+^*)^3, a < b \Rightarrow \frac{(1+bx)\ln(1+bx)}{b} - \frac{(1+ax)\ln(1+ax)}{a} \geq 0$$

Soit alors x strictement positif quelconque fixé.

Considérons la fonction φ définie sur \mathbb{R}_+^* par : $\varphi_x(t) = \frac{(1+xt)\ln(1+xt)}{t}$.

φ_x est dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme rapport de deux fonctions dérivables sur cet intervalle et pour tout réel t strictement positif (attention ! On dérive par rapport à la variable t !), on a :

$$\begin{aligned} \varphi_x'(t) &= \frac{\left[x \times \ln(1+xt) + (1+xt) \times \frac{x}{1+xt} \right] \times t - (1+xt)\ln(1+xt) \times 1}{t^2} \\ &= \frac{xt \ln(1+xt) + xt - (1+xt)\ln(1+xt)}{t^2} \\ &= \frac{xt - \ln(1+xt)}{t^2} \end{aligned}$$

En tenant compte du résultat classique : $\forall y \in \mathbb{R}_+^*, y - \ln(1+y) > 0$, il vient immédiatement :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \varphi_x'(t) > 0$$

La fonction φ_x est donc strictement croissante :

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, a < b \Leftrightarrow \varphi_x(a) < \varphi_x(b) \Leftrightarrow \frac{(1+ax)\ln(1+ax)}{a} < \frac{(1+bx)\ln(1+bx)}{b}$$

On a donc finalement : $\forall (a, b, x) \in (\mathbb{R}_+^*)^3, a < b \Rightarrow \frac{(1+bx)\ln(1+bx)}{b} - \frac{(1+ax)\ln(1+ax)}{a} > 0$,
soit : $f'(x) > 0$.

En définitive, la fonction f est strictement croissante.

Résultat final

Pour tous réels strictement positifs a et b tels que $a < b$, la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$f(x) = \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$$

est strictement croissante.

Complément

A titre de complément, on remarquera que l'on a, pour tous réels a et b strictement positifs tels que $a < b$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)} = \frac{a}{b} < 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)} = 1^-$$