

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$$

En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \right]$.

Analyse

L'exercice permet, avec des outils techniques simples, de calculer une jolie limite. Classiquement, le fait que l'on ait affaire à un produit doit nous faire penser (même si ce n'est pas systématiquement fructueux) à travailler sur son logarithme népérien. On se ramène alors à calculer la limite d'une somme dont chaque terme est encadré grâce au résultat préliminaire. Le théorème des gendarmes n'est alors probablement pas loin...

Résolution

On pose classiquement, pour tout réel x positif : $\varphi(x) = x - \ln(1+x)$.

On a : $\varphi(0) = 0$. Par ailleurs, la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur \mathbb{R}_+ comme composée de la fonction affine $x \mapsto 1+x$ dérivable sur \mathbb{R} , et donc sur \mathbb{R}_+ , et à valeur dans \mathbb{R}_+^* (car $x > 0 \Rightarrow 1+x > 1$) et de la fonction logarithme népérien dérivable sur \mathbb{R}_+^* . La fonction φ est donc dérivable sur \mathbb{R}_+ comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle (la fonction identité et la fonction $x \mapsto -\ln(1+x)$).

Il vient alors, pour tout x réel positif : $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0$.

Comme la fonction φ' ne s'annule que pour $x = 0$, on en déduit immédiatement que la fonction φ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ . On a donc :

$$x > 0 \Leftrightarrow \varphi(x) > \varphi(0) \Leftrightarrow x - \ln(1+x) > 0 \Leftrightarrow x > \ln(1+x)$$

De façon similaire, on pose, pour tout réel x positif : $\Phi(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$.

On a : $\Phi(0) = 0$. La fonction Φ est dérivable sur \mathbb{R}_+ comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle (la fonction $x \mapsto -\ln(1+x)$ et la fonction polynôme

$$x \mapsto -x + \frac{x^2}{2}).$$

Il vient alors, pour tout x réel positif : $\Phi'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1 - (1-x^2)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$.

Comme la fonction Φ' ne s'annule que pour $x=0$, on en déduit immédiatement que la fonction Φ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ . On a donc :

$$x > 0 \Leftrightarrow \Phi(x) > \Phi(0) \Leftrightarrow \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} > 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$$

En définitive, on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$$

Pour tout entier naturel n , posons : $u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$.

Comme $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, 1 + \frac{k}{n^2} > 0$, on peut considérer :

$$\begin{aligned} \ln u_n &= \ln \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \right] \\ &= \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \ln \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) + \dots + \ln \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \end{aligned}$$

On a : $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, 1 + \frac{k}{n^2} > 0$. D'après le résultat précédent, il vient alors :

$$\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{k}{n^2}\right)^2 < \ln \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) < \frac{k}{n^2}$$

Soit, en sommant :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left[\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{k}{n^2}\right)^2 \right] &< \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) < \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{k}{n^2}\right)^2 &< \ln u_n < \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{1}{2} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n k^2 &< \ln u_n < \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \end{aligned}$$

On a : $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

On en tire :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left[\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{k}{n^2} \right)^2 \right] &< \ln u_n < \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{1}{2} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n k^2 &< \ln u_n < \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2n^4} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} &< \ln u_n < \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} &< \ln u_n < \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

On a immédiatement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{12n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{6n} = 0$$

Le théorème des gendarmes nous donne alors immédiatement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n = \frac{1}{2}$ puis,

l'exponentielle étant continue sur \mathbb{R} (et donc, en particulier, en $\frac{1}{2}$) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp(\ln u_n) = \exp\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$$

Résultat final

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \right] = \sqrt{e}$$