

Calculer, pour tout entier n non nul, la dérivée n ième de : $x \mapsto \ln x$

Analyse

Il s'agit d'une application directe du cours. Le calcul de quelques dérivées conduit à poser une expression générale de la dérivée n -ième du logarithme népérien, expression dont on établit l'exactitude par récurrence.

Résolution

Le logarithme népérien étant défini sur $]0, +\infty[$, c'est sur cet intervalle que nous menons les calculs.

On a : $(\ln x)' = \frac{1}{x} = x^{-1}$. Il vient alors : $(\ln x)'' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$.

Puis : $(\ln x)^{(3)} = (-x^{-2})' = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$ et $(\ln x)^{(4)} = (2x^{-3})' = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$.

Ces premiers calculs nous conduisent à étudier l'expression suivante de la dérivée n -ième du logarithme népérien (rappelons que $0! = 1$) :

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^n \frac{(n-1)!}{x^n}$$

Soit donc la proposition $P(n) : (\ln x)^{(n)} = (-1)^n \frac{(n-1)!}{x^n}$.

Nous avons vu que cette proposition était vraie aux rangs 1, 2, 3 et 4.

Supposons qu'elle soit vraie au rang n . On suppose donc : $(\ln x)^{(n)} = (-1)^n \frac{(n-1)!}{x^n}$.

Calculons alors, la dérivée du logarithme népérien à l'ordre $n+1$. On a :

$$\begin{aligned} (\ln x)^{(n+1)} &= \left((-1)^n \frac{(n-1)!}{x^n} \right)' = (-1)^n (n-1)! (x^{-n})' \\ &= -n (-1)^n (n-1)! x^{-n-1} = (-1)^{n+1} n! x^{-(n+1)} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{n!}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

La proposition $P(n+1)$ est donc vraie.

Il vient donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ vraie. C'est à dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (\ln x)^{(n)} = (-1)^n \frac{(n-1)!}{x^n}$$

Résultat final

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (\ln x)^{(n)} = (-1)^n \frac{(n-1)!}{x^n}$$