

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable.

On suppose qu'il existe un nombre réel M strictement positif tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0 \text{ et } f''(x) \leq M$$

1. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange au point 0 pour f .
(on justifiera le choix de l'ordre)
2. En déduire l'inégalité : $\forall x \in \mathbb{R}, f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} M \geq 0$.
3. Montrer que l'on a l'inégalité : $|f'(0)| \leq \sqrt{2M f(0)}$.

Analyse

L'exercice vise à majorer, sous les hypothèses posées, le coefficient directeur (en valeur absolue) de la tangente au graphe de f à l'origine.

Résolution

1^{ère} question

La fonction f étant deux fois dérivable sur \mathbb{R} , on peut écrire la formule de Taylor à l'origine (il s'agit donc, stricto sensu, d'une formule de MacLaurin) avec reste de Lagrange à l'ordre 1 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists \theta \in]0; 1[/ f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(\theta x)$$

2^{ème} question

Comme, par hypothèse, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$, la formule précédente nous permet d'écrire l'inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \underbrace{f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(\theta x)}_{f(x)}$$

Mais on sait également, par hypothèse, que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) \leq M$. L'inégalité précédente peut alors être complétée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \underbrace{f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(\theta x)}_{f(x)} \leq f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} M$$

D'où, finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} M$$

3^{ème} question

Considérons la fonction polynôme g du second degré (M étant non nul) définie par :

$$g(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} M.$$

Ses coefficients sont fixés et, d'après la question précédente, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$$

Or une fonction polynôme garde un signe constant si, et seulement si, le discriminant de l'équation du second degré associée est négatif ou nul.

Ici, l'équation associée à g est : $f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} M = 0$.

Son discriminant s'écrit : $\Delta = (f'(0))^2 - 4 \frac{M}{2} f(0) = (f'(0))^2 - 2M f(0)$. La condition $\Delta \leq 0$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \Delta &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (f'(0))^2 - 2M f(0) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (f'(0))^2 &\leq 2M f(0) \\ \Leftrightarrow |f'(0)| &\leq \sqrt{2M f(0)} \end{aligned}$$

La dernière équivalence est licite puisque l'on a : $M > 0$ et $f(0) \geq 0$ (f étant une fonction positive).

On a bien :

$$|f'(0)| \leq \sqrt{2M f(0)}$$