

Soit  $a$  un réel et  $h$  un réel strictement positif.

Soit  $f$  une fonction réelle de la variable réelle définie et deux fois dérivable sur  $[a ; a + 2h]$ .

Montrer qu'il existe un réel  $c \in [a ; a + 2h]$  tel que :

$$f''(c) = \frac{f(a+2h) + f(a) - 2f(a+h)}{h^2}$$

Indication : on utilisera la fonction  $g$  définie sur  $[a ; a + h]$  par

$$g(x) = f(x+h) - f(x).$$

---

## Analyse

L'énoncé nous conduit à utiliser le théorème des accroissements finis.

Pour autant, s'il est appliqué « froidement » à la fonction  $f$  sur chaque intervalle  $[a ; a + h]$  et  $[a + h ; a + 2h]$ , il nous conduit à écrire :

$$f'(c_1) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
$$f'(c_2) = \frac{f(a+2h) - f(a+h)}{h}$$

où  $c_1$  et  $c_2$  appartiennent respectivement à ces intervalles.

L'application du théorème des accroissements finis à la fonction  $f'$  sur l'intervalle  $[c_1 ; c_2]$  nous conduit alors à établir l'existence d'une valeur  $c$  appartenant à  $[c_1 ; c_2]$  et telle que :

$$f''(c) = \frac{f'(c_2) - f'(c_1)}{c_2 - c_1} = \frac{f(a+2h) + f(a) - 2f(a+h)}{h(c_2 - c_1)}$$

Le problème consiste donc à montrer que de telles égalités peuvent être obtenues avec  $c_2 - c_1 = h$ . L'indication fournie permet d'obtenir ce résultat.

---

## Résolution

On considère donc la fonction  $g$  définie sur  $[a, a + h]$  par :

$$\forall x \in [a ; a + h], g(x) = f(x+h) - f(x)$$

Puisque  $f$  est deux fois dérivable sur  $[a ; a + 2h]$ ,  $g$  l'est également sur  $[a ; a + h]$  et on a :

$$\forall x \in [a ; a + h], g'(x) = f'(x+h) - f'(x)$$

On peut alors appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[a ; a + h]$  :

$$\exists b \in [a ; a + h] / g'(b) = \frac{g(a+h) - g(a)}{(a+h) - a} = \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

Cette égalité peut en fait être écrite de deux façons différentes en utilisant la définition de  $g$  :

- $g'(b) = f'(b+h) - f'(b)$  ;
- ou :

$$\begin{aligned} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} &= \frac{(f(a+2h) - f(a+h)) - (f(a+h) - f(a))}{h} \\ &= \frac{f(a+2h) + f(a) - 2f(a+h)}{h} \end{aligned}$$

Mais  $f$  étant dérivable une seconde fois sur  $[a ; a + 2h]$ , elle l'est en particulier sur l'intervalle  $[b ; b + h]$ . On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction  $f'$  sur ce dernier intervalle :

$$\exists c \in [b ; b + h] / f''(c) = \frac{f'(b+h) - f'(b)}{h}$$

D'après ce qui précède, il vient alors :

$$\begin{aligned} f''(c) &= \frac{f'(b+h) - f'(b)}{h} = \frac{1}{h} \left( \frac{f(a+2h) + f(a) - 2f(a+h)}{h} \right) \\ &= \frac{f(a+2h) + f(a) - 2f(a+h)}{h^2} \end{aligned}$$

Le résultat est ainsi démontré.

---

## Résultat final

$$\exists c \in [a ; a + 2h] / f''(c) = \frac{f(a+2h) + f(a) - 2f(a+h)}{h^2}$$